



ÉNS DE LYON
*Master 2 de Géométrie
Arithmétique*
Année scolaire 2020-2021



RAPPORT DE STAGE DE M2

~

MOTIFS ET 1-MOTIFS DE NORI

Auteur :
Swann TUBACH

Supervisé par :
Sophie MOREL

MARS-JUILLET 2021

Introduction	3
partie 1. Catégories Générales de Motifs	4
1. Motifs de Nori	4
1.1. Catégories de Diagrammes	4
1.2. Diagramme multiplicatifs	9
1.3. Diagrammes de variétés et Motifs de Nori	11
1.4. Conventions homologiques	18
1.5. Comparaison avec d'autres catégories de motifs	18
2. Motifs de Voevodsky	20
2.1. Correspondances finies	20
2.2. Faisceaux avec transfert	20
2.3. Motifs de courbes	22
partie 2. Interlude sur certaines classes de variétés et les 1-motifs	22
3. Réseaux et Tores	22
4. Variétés abéliennes et semi-abéliennes	23
4.1. Variétés abéliennes	23
4.2. Isogénies et structure des variétés abéliennes	24
4.3. Variétés Abéliennes comme quotients de Jacobiennes	25
4.4. Variétés Semi-Abéliennes	25
4.5. Variété D'Albanese	26
5. 1-Motifs de Deligne	26
5.1. Définition	26
5.2. Dualité	27
5.3. 1-Motif d'une variété	27
5.4. Réalisations	28
5.5. Comparaison avec les motifs de Voevodsky	30
partie 3. Comparaison des 1-motifs de Deligne et 1-motifs de Nori	30
6. n -motifs	31
7. Équivalence entre les 1-motifs de Deligne et une catégorie de diagrammes	31
7.1. Un lemme catégorique	31
7.2. Diagramme de courbes	32
8. Début de comparaison avec les motifs de Deligne : le foncteur est pleinement fidèle	34
9. Fin de la comparaison : le foncteur est essentiellement surjectif	36
9.1. Stabilité par sous-quotients	36
9.2. Stabilité par extensions	37
Références	40

Introduction

La formulation des conjectures de Weil en 1949 a beaucoup contribué au développement de théories cohomologiques des variétés algébriques. D'une part, le besoin d'une cohomologie ℓ -adique a poussé à la création de la théorie des topos, au raffinement de la théorie des faisceaux et à l'existence de la cohomologie étale ℓ -adique. D'autre part, le besoin des poids cités dans une lettre de Grothendieck à Serre a motivé l'axiomatisation des structures de Hodge mixtes par Deligne en 1971. Ensemble ces deux théories ont mené Grothendieck à définir une catégorie dite des motifs purs en 1969, qui comblerait la non existence de théorie cohomologie à coefficients dans \mathbb{Q} , un contre-exemple en caractéristique nulle ayant été donné par Serre. En fait, en caractéristique nulle, la cohomologie singulière donne une théorie cohomologique contenant l'information sur les modules sous-jacents des théories cohomologies de De Rham, Hodge et étale ℓ -adique. Cependant on perd de l'information (structures de Hodge, action du groupe de Galois, poids), et une telle théorie n'existe pas en caractéristique positive, d'où l'envie d'une catégorie abélienne des *motifs*, contenant un motif pour chaque variété (et même chaque paire fermée $Y \subset X$ de variétés), et munie de foncteurs de réalisation donnant toutes ces théories cohomologiques. Les motifs purs de Grothendieck ne fournissent des motifs que pour les variétés lisses, ce qui n'est pas entièrement satisfaisant. On en est venu à chercher une catégorie des motifs mixtes, réalisant toutes les variétés et même plus, où certains axiomes de cohomologie de Weil sont remplacés par des axiomes d'invariance par \mathbb{A}^1 -homotopie et Mayer-Vietoris.

Cette recherche n'a pas abouti, et a amené à chercher plutôt une catégorie qui serait la catégorie dérivée de ces motifs mixtes. La découverte des t -structures fait qu'une fois cette catégorie trouvée, si elle a une t -structure, mécanisme permettant de passer d'une catégorie triangulée \mathbf{D} à une catégorie abélienne \mathcal{C} , on pourrait prendre son cœur et cela donnerait la catégorie abélienne des motifs mixtes. De grands progrès ont été fait dans ce sens dans les années 90, lorsque Voevodsky construit sa catégorie des motifs, basée sur des complexes de faisceaux, ce qui lui permet de démontrer les conjectures que Beilinson avait posées sur l'existence de certains complexes de motifs. Cependant la t -structure, bien qu'on en connaisse des candidates, reste introuvable.

À la fin du XXe siècle, M. Nori construit une nouvelle catégorie de motifs sur un corps de caractéristiques nulle. Il prend le problème un peu dans l'autre sens : au lieu de partir des différents axiomes que doivent vérifier une catégorie de motifs et d'utiliser des cycles algébriques, omniprésents dans toutes les constructions précédentes, il construit, à l'aide d'une théorie formelle de représentations de diagrammes, une catégorie de motifs mixtes candidate et donnant gratuitement toutes les réalisations cohomologiques. Il construit des foncteurs de la catégorie des motifs de Voevodsky dans la catégorie dérivée des motifs de Nori, donnant un grand espoir pour que sa théorie marche.

Le but de ce stage était de comprendre comment, dans un article publié en 2012, Joseph Ayoub et Luca Barbieri-Viale démontrent que dans le cas des 1-motifs, à savoir ceux dont la cohomologie de degré plus grande que 1 s'annule, ce qui revient au même (il faut le montrer) de prendre ceux qui sont dans la catégorie engendrée par les motifs de courbes, les motifs de Nori sont ceux que l'on attendait : les motifs de Deligne.

Ce rapport va donc décrire ce qui a été étudié dans ce stage.

Dans une première partie, nous décrivons la construction catégorique de Nori, puis la machinerie qui permet de faire marcher la catégorie qu'il construit. Nous y décrivons aussi rapidement les motifs de Voevodsky et leurs liens avec ceux de Nori. Dans une seconde partie nous donnons quelques rappels sur les variétés semi-abéliennes, Jacobiennes, l'albanese et plus généralement, les 1-motifs de Deligne. Ces derniers seront très importants dans la suite puisque c'est la catégorie visée par l'équivalence. Dans la troisième partie nous rentrons dans le vif du sujet et expliquons le contenu de l'article [AB15]. Certains passages qui nous ont posé des difficultés sont plus importants dans ce rapport que dans l'article, d'autres moins, la longueur imposée de ce rapport obligeant certaines coupures.

La preuve en question se fait bien sur en plusieurs étapes. D'abord, les auteurs montrent que la catégorie des 1-motifs de Deligne est équivalente à la catégorie construite par Nori à partir d'un certain diagramme de courbes. Ensuite, en utilisant une machinerie motivique bien en place, ils utilisent cette

équivalence pour montrer ce qu'ils veulent en utilisant selon les cas, les réalisations mixtes de Huber ou motifs de Voevodsky.

Remerciements. Je tiens d'abord à remercier Sophie Morel, qui a été l'encadrante idéale de ce stage, trouvant très souvent la solution aux questions que je me posais et qui, lors de réunions hebdomadaires, m'a suivi tout au long du stage avec une bonne humeur très agréable. Aussi, je voudrais remercier Frédéric Déglise pour les questions auxquelles il a répondu et pour son invitation à l'école d'été du PCMI qui m'a beaucoup intéressé, et dont je me suis inspiré dans cette introduction.

Notations. Pour tout ce rapport, k sera un corps de caractéristique nulle, et \bar{k} sera sa clôture algébrique. Une variété sera un k -schéma séparé de type fini. Toutes les catégories de modules en jeu seront des catégories de modules de type fini. Lorsqu'une catégorie \mathbb{Z} -linéaire \mathcal{C} sera écrite avec un \mathbb{Q} comme $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}$, il s'agira de la catégorie où l'on tensorise les morphismes par \mathbb{Q} . Par exemple pour la catégorie des variétés abéliennes cela inverse les isogénies.

Première partie 1. Catégories Générales de Motifs

1. MOTIFS DE NORI

L'approche de Nori est de construire directement une catégorie abélienne factorisant tous les foncteurs de cohomologie se comparant à la cohomologie singulière. Pour cela il développe une théorie générale en partant de représentations de carquois :

1.1. Catégories de Diagrammes.

1.1.1. *Premières définitions.* On commence par les définitions de base, dans cette sous-partie nous allons suivre 7.2 de [HM17] presque à la lettre (à la langue près).

Définition 1.1.1

Un diagramme, ou un carquois est une collection d'objets et de flèches entre ces objets. Plus précisément, un carquois \mathcal{D} est une collection $Ob(\mathcal{D})$ et pour chaque paire d'objets A, B dans $Ob(\mathcal{D})$, un ensemble $\mathcal{D}(A, B)$ de flèches entre A et B .

Remarque 1.1.2. Si $Ob(\mathcal{D})$ est un ensemble, on peut voir un diagramme \mathcal{D} comme un préfaisceau sur la catégorie $O \rightrightarrows F$, avec $\mathcal{D}(O) = Ob(\mathcal{D})$ et pour $A, B \in Ob(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(s)^{-1}(\{A\}) \cap \mathcal{D}(b)^{-1}(\{B\})$.

Exemples 1.1.3. (1) Tout graphe orienté est un diagramme.

(2) On a un foncteur d'oubli $\text{Cat} \rightarrow \text{Diagrammes}$ qui à une catégorie \mathcal{C} associe le diagramme sous-jacent.

Définition 1.1.4

Un morphisme de diagrammes $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ d'un diagramme vers une catégorie abélienne est appelé une représentation du diagramme \mathcal{D} à coefficients dans \mathcal{A} . De telles représentations de diagrammes à coefficient dans \mathcal{A} forment une catégorie dans laquelle un morphisme $T \rightarrow T'$ est une collection $(e_D)_{D \in Ob(\mathcal{D})}$ avec pour chaque $D \in Ob(\mathcal{D})$, $e_D \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T(D), T'(D))$ qui vérifient la condition de compatibilité :

Pour toute flèche $f : A \rightarrow B$ dans \mathcal{D} , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{e_A} & T'(A) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow T'(f) \\ T(B) & \xrightarrow{e_B} & T'(B) \end{array}$$

Les diagrammes forment évidemment une catégorie.

Nous noterons souvent T_A ou TA pour $T(A)$ et Tf pour $T(f)$.

Soit R un anneau noetherien, et soit $R\text{-mod}$ la catégorie des R -modules de type fini. On dira d'une catégorie abélienne \mathcal{A} qu'elle est R -linéaire si ses Hom sont des R -modules de type fini et la composition R -bilineaire. Un foncteur additifs entre telles catégories sera dit R -linéaire s'il commute sur les flèches avec l'action de R .

Le but de cette partie est de construire, étant donnée une représentation $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$; une catégorie abélienne R -linéaire $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ muni d'un foncteur d'oubli ¹ $f_T : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow R\text{-mod}$, universelle (dans un sens qui sera précisé plus bas) pour la propriété de factoriser $T = f_T \circ \bar{T}$ avec $\bar{T} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ une représentation. On demandera de plus que cette catégorie se comporte bien avec les changements de scalaire.

Définition 1.1.5

Si $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ est une représentation et que S est une R -algèbre, on pose $T_S : \mathcal{D} \mapsto T(D) \otimes_R S$.

Si le diagramme \mathcal{D} est fini (c'est à dire, si $\text{Ob}(\mathcal{D})$ est fini), il est facile de construire la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T) : \text{End}(T)$ l'algèbre des endomorphismes de T est un R -module et on peut poser

$$(1.1.1) \quad \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) = \text{End}(T)\text{-mod}$$

la catégorie des $\text{End}(T)$ -modules à gauche de type fini. En effet on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.6

$\text{End}(T)$ est un R -module de type fini, faisant de $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ une catégorie abélienne à travers laquelle T se factorise.

De plus, si S est une R -algèbre plate, $\text{End}(T_S) = \text{End}(T) \otimes_R S$.

Démonstration. $\text{End}(T) = \{(e_D)_D \in \prod_{D \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \text{Hom}_R(T_D, T_D)\}$ est un sous module du module noetherien $\prod_{D \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \text{Hom}_R(T_D, T_D)$ donc est de type fini. La factorisation vient du fait évident que chaque T_D est un $\text{End}(T)$ -module. Montrons la propriété de changement de base : $\text{End}(T)$ est défini par la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{End}(T) \rightarrow \prod_{D \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \text{Hom}_R(T_D, T_D) \rightarrow \prod_{D, D' \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \prod_{f \in \mathcal{D}(D, D')} \text{Hom}_R(T_D, T_{D'})$$

où la seconde flèche est donnée par $(e_D)_D \mapsto (e'_D \circ T(f) - T(f) \circ e_D)_f$. Le dernier produit n'est pas nécessairement fini donc tensoriser par S ne donnera pas le résultat voulu puisque le produit tensoriel ne commute pas nécessairement avec les produits infinis. Par contre, $\text{Hom}_R(T_D, T_{D'})$ est un R -module noetherien pour chaque paire (D, D') , et on peut en choisir un système fini de générateurs $G(D, D')$. Alors la suite suivante aussi est exacte :

$$0 \rightarrow \text{End}(T) \rightarrow \prod_{D \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \text{Hom}_R(T_D, T_D) \rightarrow \prod_{D, D' \in \text{Ob}(\mathcal{D})} \prod_{f \in G(D, D')} \text{Hom}_R(T_D, T_{D'})$$

, et la platitude (et le fait que nous les modules en jeu soient de présentation finie car R est noetherien) de S donne alors que $\text{Hom}_S(T_D \otimes S, T_{D'} \otimes S) = \text{Hom}_R(T_D, T_{D'}) \otimes S$ donc qu'en tensoriant par S la suite exacte précédente, $\text{End}(T_S) = \text{End}(T) \otimes S$. \square

Remarque 1.1.7. La construction de $\text{End}(T)$ est bien sûr fonctorielle en D : si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est un morphisme de diagrammes et $T' : \mathcal{D}' \rightarrow R\text{-mod}$ une représentation on obtient $F^* : \text{End}(T) \rightarrow \text{End}(T')$ un morphisme de R -algèbres, où l'on a noté $T = T' \circ F$.

Maintenant, si D est un diagramme quelconque, on prend I l'ensemble des sous-diagrammes finis F de D , ordonnés par l'inclusion (on prend des sous diagrammes *pleins*, c'est à dire que $F(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$ pour $A, B \in \text{Ob}(F)$), pour $F \in I$ on note $T|_F$ la restriction de T à F . Alors on obtient la propriété suivante :

1. C'est à dire, un foncteur exact et fidèle.

Proposition 1.1.8

La famille $(\mathcal{C}(F, T|_F))_{F \in I}$ forme un système filtrant inductif de catégories abéliennes et les foncteurs de transition sont des foncteurs exacts et fidèles.

Proposition 1.1.9

Soit $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ une représentation de \mathcal{D} . La catégorie

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, T) := 2 - \text{colim}_F \mathcal{C}(F, T|_F)$$

existe, c'est une catégorie abélienne R -linéaire donnant une factorisation de T

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \xrightarrow{f_T} R\text{-mod}$$

et le foncteur d'oubli f_T est fidèle et exact.

Démonstration. Un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ est un objet de $\mathcal{C}(F, T|_F)$ pour un certain sous diagramme fini F de \mathcal{D} . Si $X \in \mathcal{C}(F, T|_F)$, et $F \subset F'$, on note $X_{F'}$ l'image de X dans $\mathcal{C}(F', T|_{F'})$. Alors les morphismes sont donnés par la colimite $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)}(X, Y) = \text{colim}_F \text{Hom}_{\mathcal{C}(F, T|_F)}(X_F, Y_F)$ (en fait la limite ici n'est que sur les F pour lesquels X_F et Y_F sont définis, c'est un ensemble non vide). Le fait que la catégorie soit abélienne R -linéaire est une conséquence directe du fait que chacun des termes de la limite le soit et que les foncteurs de transition soient fidèles et exacts.

Si $A \in \mathcal{D}$, pour chaque diagramme fini F contenant A , T_A est un élément de $\mathcal{C}(F, T|_F)$, compatible avec les foncteurs de transition donc cela définit bien une représentation $\bar{T} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$. Le foncteur d'oubli est trivialement fidèle et exact, et donne la factorisation voulue. \square

Une propriété importante de la catégorie de diagramme est la functorialité en le diagramme. Elle sera utilisée crucialement dans la preuve de son universalité.

Proposition 1.1.10

Soit $G : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un morphisme de diagramme et $T : \mathcal{D}_2 \rightarrow R\text{-mod}$ une représentation. Alors il existe un foncteur R -linéaire, fidèle et exact $\mathcal{G} : \mathcal{C}(\mathcal{D}_1, T \circ G) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}_2, T)$ tel que le diagramme suivant commute à isomorphisme fonctoriel près :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \xrightarrow{G} & \mathcal{D}_2 \\ \bar{T} \circ G \downarrow & & \downarrow \bar{T} \\ \mathcal{C}(\mathcal{D}_1, T \circ G) & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{C}(\mathcal{D}_2, T) \\ f_{T \circ G} \searrow & & \swarrow f_T \\ & R\text{-mod} & \end{array}$$

Démonstration. Si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont finis ça n'est que 1.1.7. Si \mathcal{D}_2 est infini, on prend F un sous diagramme fini de \mathcal{D}_2 qui contient l'image de G , et alors on a $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1, T \circ G) \rightarrow \mathcal{C}(F, T|_F) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}_2, T)$ et la remarque 1.1.7 fait que ce foncteur ne dépend pas du F choisi. Si \mathcal{D}_1 est infini, on peut définir $\mathcal{C}(F, T \circ G) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}_2, T)$ pour chaque diagramme fini F de \mathcal{D}_1 , puis on passe à la limite. Comme chacun des foncteurs entre diagrammes finis sont exacts et fidèles, \mathcal{G} l'est aussi. \square

Avec des arguments très similaire on montre aussi :

Proposition 1.1.11

- (1) Si T_1, T_2 sont deux représentations isomorphes d'un diagramme \mathcal{D} , alors les catégories $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T_1)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T_2)$ sont équivalentes.
- (2) Si $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ est une représentation et S est une R -algèbre plate, alors il y a un foncteur de changement de base fidèle et R -linéaire $(\cdot) \otimes_R S : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{D}, T_S T \otimes_R S)$ compatible avec le changement de base $R\text{-mod} \rightarrow S\text{-mod}$.

1.1.2. *Propriété universelle de la catégorie de diagramme.* C'est la suivante :

Théorème 1.1.12

Soit $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ une représentation de diagramme. Pour toute représentation $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ dans une catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{A} munie d'un foncteur d'oubli fidèle et exact $f : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$ vérifiant $T = f \circ F$, il existe un unique (à unique isomorphisme près) foncteur $L(F) : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{A}$ tel que le diagramme suivant commute à isomorphisme fonctoriel près :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) & \\
 \bar{T} \nearrow & \downarrow L(F) & \searrow f_T \\
 \mathcal{D} & \xrightarrow{T} & R\text{-mod} \\
 F \searrow & \downarrow & \nearrow f \\
 & \mathcal{A} &
 \end{array}$$

La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ est déterminée par cette propriété, et est fonctorielle en \mathcal{D} .

La preuve prendra un certain temps. Elle est contenue dans les sous-sections 1.1.3 à 1.1.9. Citons d'abord une généralisation gratuite de 1.1.12 et son astucieuse preuve :

Corollaire 1.1.13

On se place dans les conditions du théorème 1.1.12 en remplaçant l'hypothèse que $T = f \circ F$ par : On a une R -algèbre S fidèlement plate et un isomorphisme de représentations dans $S\text{-mod}$ $\phi : T_S \rightarrow (f \circ F)_S$.

Alors il existe un foncteur fidèle et exact $L(F) : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{A}$ et un isomorphisme de foncteurs $\bar{\phi} : (f_T)_S \rightarrow f_S \circ L(F)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) & \\
 \bar{T} \nearrow & \downarrow L(F) & \searrow (f_T)_S \\
 \mathcal{D} & \xrightarrow{T_S} & S\text{-mod} \\
 F \searrow & \downarrow & \nearrow f_S \\
 & \mathcal{A} &
 \end{array}$$

commute à ϕ et $\bar{\phi}$ près. La paire $(L(F), \bar{\phi})$ est unique à isomorphisme de foncteurs additifs et exacts près.

Démonstration. On pose \mathcal{B} la catégorie dont les objets sont les triplets (V, W, ψ) avec $V \in R\text{-mod}$, $W \in \mathcal{A}$ et $\psi : V \otimes S \rightarrow f(W) \otimes S$ est un isomorphisme. Les morphismes sont les paires de morphismes faisant commuter le seul carré raisonnable de définir ici. Comme S est plate sur R , c'est une catégorie abélienne (c'est à dire que tous les axiomes valables à coefficients dans R sont définissable avec des diagrammes, qui restent exacts après tensorisation par S), les noyaux et conoyaux étant définis composante par composante. $g : \mathcal{B} \rightarrow R\text{-mod}$ la projection sur le premier facteur est fidèle et exacte car S est fidèlement plate. De plus, (T, F, ϕ) définit une représentation $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$. On obtient alors une factorisation

$$T : \mathcal{D} \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \xrightarrow{L(G)} \mathcal{B} \xrightarrow{g} R\text{-mod}$$

Mais alors $L(G)$ est de la forme $(L_1, L(F), \bar{\phi})$ où $L(F)$ est un foncteur R -linéaire $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{A}$. $L(F)$ est exact et fidèle car $L(G)$ et la seconde projection le sont. Aussi, on a $L(F) \circ \bar{T}$ est la seconde projection de $L(G) \circ \bar{T}$ donc est F , et $f_S \circ L(F) \xrightarrow{\sim} \bar{\phi}^{-1}(f_T)_S$. L'unicité de $L(F)$ à unique isomorphisme près découle trivialement de celle de $L(G)$. \square

1.1.3. *La catégorie de diagramme d'une catégorie abélienne.* La preuve du théorème 1.1.12 repose sur le cas où le diagramme \mathcal{D} est le graphe sous-jacent d'une catégorie abélienne R -linéaire munie d'un foncteur d'oubli $\mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$ fidèle et exact. Dans ce cas, on a

Théorème 1.1.14

Soit $T : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$ un foncteur additif fidèle et exact d'une catégorie abélienne R -linéaire vers les R -modules de type fini. Alors si

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C}(\mathcal{A}, T) \xrightarrow{f_T} R\text{-mod}$$

est la factorisation de T donnée par 1.1.9, le foncteur \bar{T} est une équivalence de catégories.

La preuve sera contenue dans les quelques sections (1.1.4 à 1.1.9) suivantes :

1.1.4. *Catégorie de diagrammes d'une catégorie pseudo-abélienne engendrée par un seul élément.*² Soit \mathcal{P} une catégorie R -linéaire semi-abélienne engendrée par un seul élément p . On notera $\mathcal{P} = \langle p \rangle^{\text{psab}}$. On a le résultat suivant :

Proposition 1.1.15

Supposons qu'on ait une représentation $T : \mathcal{P} \rightarrow R\text{-mod}$ qui soit un foncteur R -linéaire. Alors notant $E(p) = \text{End}(T|_{\{p\}})$, on a $E(p) = \text{End}(T)$, donc $\mathcal{C}(\mathcal{P}, T) = E(p)\text{-mod}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'une famille $(\alpha_q)_{q \in \mathcal{P}}$ de morphismes compatibles est en fait déterminée par α_p seul. Si $q = p^n$, alors notant i l'injection sur le k -ième facteur et π la projection sur le j -ième, α_q est compatible avec π et i donc est nécessairement la diagonale $(\alpha_p)^n$. Si $p^n = q \oplus q'$, les compatibilités avec les injections et les projections impliquent encore une fois que α_q est déterminé par α_p . Dès lors, $E(p) = \text{End}(T)$. Pour tout diagramme fini F , on a donc aussi $E(p) = \text{End}(T|_F)$, ce qui démontre la propriété. \square

1.1.5. \otimes *externe.* La première étape de la preuve de l'équivalence consiste, étant donné une R -algèbre de type fini E et $p \in \mathcal{A}$ un E -module à droite (c'est à dire qu'on a un morphisme R -linéaire $E^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(p)$ ³), un foncteur R -linéaire $p \otimes_E E\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}$ adjoint à gauche de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(p, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow E\text{-mod}$. Le fait que ce dernier foncteur est bien à valeurs dans $E\text{-mod}$ et non $R\text{-mod}$ est trivial : c'est l'action de E sur p qui le donne.

Nécessairement, un tel foncteur va vérifier $p \otimes_E E = p$, donc $p \otimes_E E^n = p^n$. On le définit ensuite en choisissant une présentation $E^n \rightarrow E^m \rightarrow M$ et en définissant $p \otimes_E M = \text{coker}(p^n \rightarrow p^m)$ où l'application $p^n \rightarrow p^m$ est donnée par les coefficients de la matrice de $E^n \rightarrow E^m$. Il est facile de montrer que cette construction est fonctorielle, ne dépend pas des choix et donne bien l'adjoint voulu. Si $T : \mathcal{A} \rightarrow E\text{-mod}$ est un foncteur R -linéaire et exact, on a alors $T(p \otimes_E M) = T(p) \otimes_E M$.

1.1.6. Hom *externe.* Pour \mathcal{A} une catégorie R -linéaire et $p \in \mathcal{A}$, en calquant cette construction pour $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, p) : R\text{-mod} \rightarrow A^{\text{op}}$, on en trouve un adjoint à gauche, qu'on note $\text{Hom}_R(\cdot, p) : R\text{-mod} \rightarrow A^{\text{op}}$, et qui vérifie $\text{Hom}_R(R, p) = p$.

De plus, si \mathcal{A} est munie d'un foncteur R -linéaire $T : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$, on a $T(\text{Hom}_R(M, p)) = \text{Hom}_R(M, T_p)$.

2. Pseudo-abélienne veut dire additive dans laquelle tout idempotent est scindé : on peut prendre des facteurs directs.

3. E^{op} est l'anneau de même loi additive que E , mais dont la loi multiplicative est inversée : $a \times_{E^{\text{op}}} b = b \times_E a$.

1.1.7. *Adjonction.* Si on prend $E = R$ et qu'on suppose que \mathcal{A} a un foncteur T exact R -linéaire vers $R\text{-mod}$, on obtient, à $M \in R\text{-mod}$ fixé, deux foncteurs $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ donnés par $\text{Hom}_R(\cdot, M)$ et $\cdot \otimes_R M$. Comme lorsque l'on applique T on obtient l'adjonction usuelle, la propriété universelle donne que $\text{Hom}_R(\cdot, M)$ est adjoint à gauche de $\cdot \otimes_R M$.

1.1.8. *Construction de l'équivalence.* La suite de la preuve consiste à construire pour chaque $p \in \mathcal{A}$ un mystérieux sous objet $X(p) \in \langle p \rangle^4$ de $\text{Hom}_R(Tp, p)$, qui d'un part s'envoie sur $E(p)$ par le foncteur $\bar{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}, T)$ et vérifie $X(p) \otimes_{E(p)} \bar{T}(p) \simeq p$ par l'évaluation $\text{Hom}_R(Tp, p) \otimes_R Tp \rightarrow p$ (qui vient de l'adjonction précédente).

$E(p) = \{\varphi \in \text{End}(Tp) \mid T(a) \circ \varphi = \varphi \circ T(a), \forall a : p \rightarrow p\}$ est un R module de type fini puisque $\text{End}(Tp)$ l'est. On en choisit des générateurs (a_1, \dots, a_n) de sorte que $E(p)$ soit le noyau de

$$\begin{cases} \text{Hom}(Tp, Tp) & \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \text{Hom}(Tp, Tp) \\ f & \mapsto f \circ T(a_i) - T(a_i) \circ f \end{cases}$$

On définit alors $X(p)$ comme le noyau de $\begin{cases} \text{Hom}_R(Tp, p) & \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \text{Hom}_R(Tp, p) \\ f & \mapsto f \circ T(a_i) - a_i \circ f \end{cases}$. $X(p)$ va bien

s'envoyer sur $E(p)$ par \bar{T} , et pour vérifier l'isomorphisme $X(p) \otimes_{E(p)} \bar{T}(p) \simeq p$ il faut réussir à écrire $p \otimes_{E(p)} M$ comme un conoyau comme ça l'est pour les modules⁵, il s'agit juste d'un exercice technique. Une fois $X(p)$ construit on peut définir $i_p : E(p)\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}$ par $i_p(M) = X(p) \otimes M$. La composition

$E(p)\text{-mod} \xrightarrow{i_p} \mathcal{A} \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C}(\mathcal{A}, T)$ coïncide avec l'inclusion naturelle $\mathcal{C}(\langle p \rangle^{psab}, T) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}, T)$.

La preuve est finie : On écrit $\mathcal{C}(\mathcal{A}, T)$ comme la 2-colimite des $E(p)\text{-mod}$ ce qui permet avec les i_p (qui se comportent bien avec les inclusions de cette colimite) de construire un foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{A}, T) \rightarrow \mathcal{A}$ qui est une inverse à droite de \bar{T} qui est donc essentiellement surjectif et plein, et il est aussi fidèle.

1.1.9. *Fin de la preuve du théorème 1.1.12.* Le résultat découle directement du cas d'une catégorie abélienne : On a donc une représentation de diagrammes $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ qu'on factorise $\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \xrightarrow{f_T} R\text{-mod}$. Ensuite :

Démonstration. 1.1.7 donne un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}, f)$ puisque $T = f \circ F$. Alors on prend g une quasi-inverse de \bar{f} qui est inversible par 1.1.14, et on pose $L(F) = g \circ \mathcal{F}$. Le $L(F)$ convient et les résultats d'unicité découlent du théorème 1.1.14. \square

1.2. **Diagramme multiplicatifs.** Nori raffine un peu le résultat de la section précédente pour munir sa catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ d'une structure tensorielle et donne un critère de rigidité. Cela ne sera pas utilisé par la suite (notamment, les 1-motifs ne sont pas stables par produit puisque $1 + 1 = 2 > 1$ et qu'on souhaite que le produit tensorielle induise la formule de Künneth). Dans ses notes originelles, Nori n'explique pas dans les détails comment construire la structure multiplicative de la catégorie de diagrammes. Dans [HM17] (chapitre 8), iels construisent rigoureusement cette structure, au prix d'un grand formalisme. C'est pourquoi nous ne rentrerons pas dans les détails.

À partir d'ici, R est un corps ou un anneau de dedekind.vraiment

1.2.1. *La catégorie de diagramme comme une catégorie de comodules.* Soit R un anneau.

4. La sous catégorie abélienne pleine engendrée par un ensemble S de \mathcal{A} sera notée $\langle S \rangle$.

5. C'est à dire que pour les modules, le produit tensoriel peut s'écrire comme un module libre modulo des relations.

Définition 1.2.1

- (1) Une R -cogèbre A est un R -module muni de deux morphismes R -linéaires $1_A : A \rightarrow R$ (co-unité) et $\mu : A \rightarrow A \otimes_R A$ (co-multiplication) vérifiant les mêmes axiomes que les axiomes d'une algèbre, mais avec les flèches inversées. Par exemple, on veut que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mu} & A \otimes_R A \\ \downarrow Id & & \downarrow Id \otimes 1_A \\ A & \xrightarrow{Id \otimes 1} & A \otimes_R R \end{array} \text{ commute, pour énoncer la condition opposée de "a} \times 1_A = a".$$

- (2) Si A est une cogèbre, un A -comodule à droite est un R -module muni d'une flèche $M \rightarrow M \otimes_R A$ faisant commuter tous les diagrammes opposés des diagrammes définissant un module (associativité, etc..)

Soit E une R -algèbre projective de type fini. On a un isomorphisme pour tout R -module M qui s'écrit

$$(1.2.1) \quad E^\vee \otimes_R M \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(E, M)$$

En l'utilisant on arrive au résultat classique dans la théorie des comodules :

Proposition 1.2.2

E^\vee possède une structure naturelle de cogèbre, et tout E -module à gauche qui est un R -module de type fini possède une structure naturelle de E^\vee -comodule à droite. Cela donne une équivalence de catégories $E\text{-mod} \rightarrow E^\vee\text{-comod}$ entre les E -module à gauche de type fini et les E^\vee -comodules à droite de type fini.

Démonstration. On prend les axiomes d'algèbre et de modules, on les dualise (en prenant les $(\cdot)^\vee$) puis on utilise 1.2.1 et l'adjonction $\text{Hom} - \otimes$ pour transformer les $(E \otimes E)^\vee$ en $E^\vee \otimes E^\vee$. \square

Supposons maintenant qu'on ait une représentation d'un diagramme \mathcal{D} à valeurs dans les R -modules projectifs de type fini (catégorie qui sera notée $R\text{-proj}$). Alors pour chaque sous diagramme fini F de \mathcal{D} , $\text{End}(T|_F)$ est un module projectif car pour ce type d'anneau R , être projectif est équivalent à être sans torsion, et $\text{End}(T|_F)$ est le sous module d'un module projectif, donc sans torsion. Mais alors $\text{End}(T|_F)\text{-mod} \simeq \text{End}(T|_F)^\vee\text{-comod}$, et, miracle, dans la catégorie des cogèbre il y a toutes les limites (comme dans la catégories des algèbres il y a toutes les colimites), et donc $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T) = \text{colim}(\text{End}(T|_F)\text{-mod}) = \text{colim}(\text{End}(T|_F)^\vee\text{-comod}) = (\lim \text{End}(T|_F)^\vee) - \text{comod}$. La dernière intervention de limite est facile à justifier mais prend de la place en diagrammes commutatifs (cf 7.5.7 de [HM17]). Notant $A(\mathcal{D}, T) = \lim \text{End}(T|_F)^\vee$, la catégorie de diagrammes $\mathcal{C}(\mathcal{D}, T)$ est la catégorie des $A(\mathcal{D}, T)$ -comodules à droite!

1.2.2. *Vers une catégorie géométrique.* On ne peut pas s'arrêter ici. Il est bien connu que lorsque l'on a un schéma en monoïdes affine $M = \text{Spec}A$ au dessus d'un anneau R , la structure de monoïde de M se transfère en une structure de cogèbre sur A , et qu'alors la catégories des représentations algébriques du monoïde M est équivalente à celles des A -comodules.⁶ Dans ce cas, A est à la fois une algèbre et une cogèbre : c'est une bigèbre, ou biaglèbre. C'est là que la structure multiplicative entre en jeu : en définissant correctement ce que doit être un diagramme multiplicatif, cela va munir naturellement $A(\mathcal{D}, T)$ d'une structure d'algèbre, transformant la catégorie de diagramme en la catégorie des représentation d'un schéma en monoïdes. Nori a ensuite démontré un critère de rigidité qui permet de montrer que sous des hypothèses assez faibles, ce monoïde est un groupe pro-algébrique, donc que $A(\mathcal{D}, T)$ est une algèbre de Hopf. C'est une généralisation d'un théorème de reconstruction de Tannaka (dans sa version la plus simple), dont on peut trouver un énoncé et une preuve dans [DM12], *main theorem*, theorem 2.11).

6. Une représentation algébrique de M est un R -module V muni, pour chaque R -schéma affine $\text{Spec}S$ d'une action S -linéaire de $M(S)$ sur $V \otimes S$, qui se comporte bien (dans le sens évident) avec les changements de bases. L'équivalence de catégories peut se trouver dans la proposition 6.1 de [Mil20]

1.2.3. *Localisation.* En utilisant la définition déjà compliquée d'une structure multiplicative d'un diagramme (qui munira donc la catégorie de diagramme d'une structure tensorielle), on peut définir la localisation d'un diagramme par rapport à l'un de ses sommets. En fait cela permet de rendre inversible par rapport au produit tensoriel un des objets de la catégorie de diagramme. Huber et Müller-Stach construisent donc un autre diagramme qui donnera une catégorie de diagramme localisée par rapport à la première. On peut aussi directement localiser la catégorie de diagramme en utilisant une technique assez générale : Supposons qu'on ait une catégorie \mathcal{C} munie d'un endofoncteur T qu'on veuille inverser. Alors on définit une catégorie \mathcal{C}' donc les objet sont les suites $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ munies d'isomorphismes $C_n \rightarrow TC_{n-1}$, et les morphismes sont les familles de morphismes faisant commuter les diagrammes évidents. T se prolonge naturellement à \mathcal{C}' en agissant terme à terme, et dans \mathcal{C}' il à une inverse, à savoir le décalage $(C_n) \mapsto (C_{n+1})$. De plus \mathcal{C} se plonge dans \mathcal{C}' par $X \mapsto (X, TX, T^2X, \dots)$. Le plongement n'est en général pas plein.

C'est ainsi qu'on peut localiser n'importe quelle catégorie, et qu'on obtiendra la catégorie des motifs non effectifs.

1.3. **Diagrammes de variétés et Motifs de Nori.** On a maintenant tout ce qu'il faut pour définir la catégorie des motifs de Nori.

1.3.1. *Cohomologie singulière.* Nori et Huber–Müller-Stach définissent les motifs de Nori cohomologiques, tandis que Ayoub et Barbieri-Viale définissent les motifs homologiques. Nous allons tout définir cohomologiquement, puis il sera expliqué comment passer en conventions homologiques.

Définition 1.3.1

Soit X un espace topologique, et $Y \subset X$ un fermé. Le i -ième groupe de cohomologie de Betti (aussi appelée singulière) relative $H^i(X, Y, \mathbb{Z})$ à coefficients dans \mathbb{Z} est défini comme la cohomologie du faisceau $j_! \mathbb{Z}_U$ où $j : X \setminus Y = U \rightarrow X$ est l'inclusion, \mathbb{Z}_U est le faisceau constant sur U et $(j_! \mathcal{F})(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subset U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le prolongement par 0. On a un triangle distingué (dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur X) $j_! \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow i_* \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{+1}$ avec $i : Y \rightarrow X$ l'inclusion. On notera $H^i(X) = H^i(X, \mathbb{Z})$.

Proposition 1.3.2

Soit $Z \subset Y \subset X$ deux fermés dans un espace topologique X . On a une suite exacte longue $\dots \rightarrow H^i(X, Y) \rightarrow H^i(X, Z) \rightarrow H^i(Y, Z) \rightarrow H^{i+1}(X, Y) \rightarrow \dots$ qui vient d'un triangle distingué dans $\mathbf{D}(X)$ la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur X .

Démonstration. On utilise les notations suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y \setminus Z = W & \xrightarrow{\ell} & Y & \xleftarrow{k} & Z \\
 & & \downarrow i_Y & \swarrow i_Z & \\
 & & X & & \\
 & \nearrow j_Z & \uparrow j_Y & & \\
 X \setminus Z = V & & X \setminus Y = U & &
 \end{array}$$

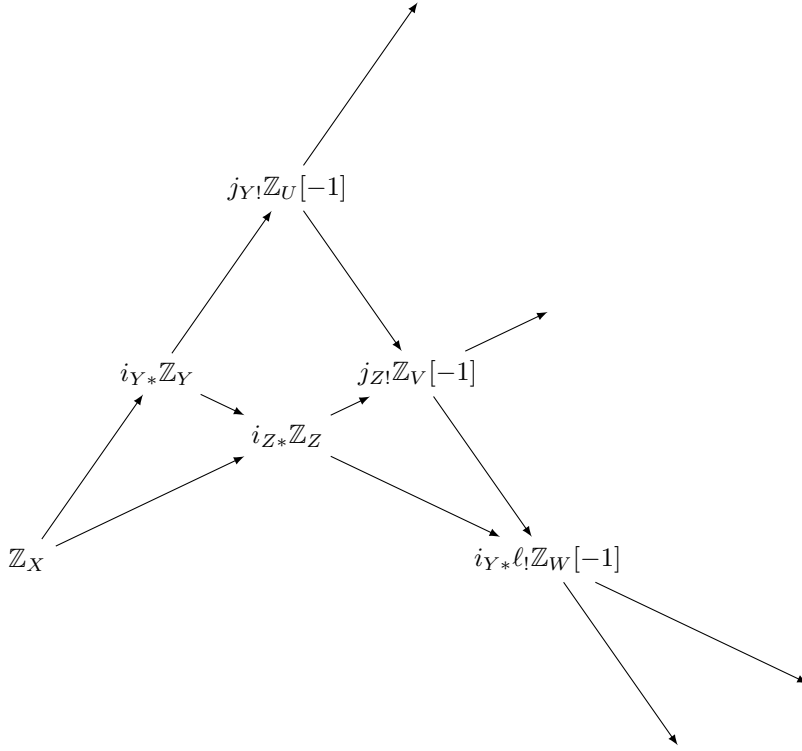
On a trois triangles distingués (le troisième obtenu en appliquant i_{Y*} au triangle distingué définissant $\ell_! \mathbb{Z}_W$) :

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow i_{Y*} \mathbb{Z}_Y \rightarrow j_{Y!} \mathbb{Z}_U[-1] \xrightarrow{+1}$$

$$\mathbb{Z}_X \rightarrow i_{Z*} \mathbb{Z}_Z \rightarrow j_{Y!} \mathbb{Z}_V[-1] \xrightarrow{+1}$$

$$i_{Y*} \mathbb{Z}_Y \rightarrow i_{Z*} \mathbb{Z}_Z = i_{Y*} k_* \mathbb{Z}_Z \rightarrow i_{Y*} \ell_! \mathbb{Z}_W[-1] \xrightarrow{+1}$$

Ils se placent dans un diagramme de l'octaèdre de base $\mathbb{Z}_X \rightarrow i_{Y*} \mathbb{Z}_Y \rightarrow i_{Z*} \mathbb{Z}_Z$:



Le triangle distingué en $[-1]$ est celui qui nous donne la suite exacte longue voulue. \square

1.3.2. *Diagramme de Nori.* Nori définit le diagramme $Pairs^{eff}$ des variétés (dans les notations de [AB15], des k -schémas) comme suit :

Définition 1.3.3

Le diagramme $Pairs^{eff}$ des variétés est le diagramme dont les sommets sont les triplets (X, Y, i) avec $Y \subset X$ un fermé dans une variété X , et $i \in \mathbb{N}$ un entier. Il y a deux types de flèches :

- (1) $(X, Y, i) \rightarrow (X', Y', i)$ pour chaque morphisme $X' \rightarrow X$ envoyant Y' dans Y .
- (2) $(Y, Z, i) \rightarrow (X, Y, i + 1)$ pour chaque suite de fermés $Z \subset Y \subset X$.

Remarque 1.3.4. Si l'on veut faire une catégorie de motifs *homologiques*, comme c'est le cas dans [AB15], il faut inverser le sens de toutes les flèches du diagramme.

On munit ce diagramme de la représentation $H^* : (X, Y, i) \mapsto H^i(X, Y, \mathbb{Z})$.

Définition 1.3.5

La catégorie des motifs de Nori cohomologiques (effectifs), est $\mathcal{MM}_{Nori}^{eff} := \mathcal{C}(Pairs^{eff}, H^*)$.

Du fait de la propriété universelle de la catégorie de diagrammes, $\mathcal{MM}_{Nori}^{eff}$ jouit de propriétés qu'on souhaite à une catégorie de motifs. Notamment :

Théorème 1.3.6

Soit $H'^* : Pairs^{eff} \rightarrow \mathcal{A}$ une représentation, avec \mathcal{A} une catégorie abélienne munie d'un foncteur fidèle et exact $f : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$, avec R une \mathbb{Z} -algèbre nothetherienne et plate. Supposons qu'il existe une R -algèbre S fidèlement plate et un isomorphisme de représentations $\Phi : H^* \otimes_{\mathbb{Z}} S \rightarrow (f \circ H'^*) \otimes_{R} S$, alors H'^* s'étend à $\mathcal{MM}_{Nori}^{eff}$.

Exemple 1.3.7. Par exemple pour $R = \mathbb{Z}$ la catégorie des structures de Hodge mixtes et H'^* le foncteur associant à une paire de variétés la structure de Hodge mixte de $H^i(X, Y, \mathbb{Z})$, et $S = \mathbb{Z}$, Φ oubliant la structure et donnant le \mathbb{Z} -module sous-jacent, alors H'^* se factorise par $\mathcal{MM}_{Nori}^{eff}$ qui contient donc l'information des structures de Hodge. La même chose marche avec la cohomologie de De Rham algébrique, ou la cohomologie ℓ -adique (on prend pour cette dernière $H'(X, Y, i) = H_{et}^i(X_{\bar{k}}, j_! \mathbb{Z}_i)$ avec $j : X \setminus Y \rightarrow X$).

1.3.3. *Différents diagrammes.* En fait, la catégorie de Nori peut s'obtenir à l'aide d'autres diagrammes, plus petits.

Définition 1.3.8

- (1) Le diagramme $Good^{eff}$ des bonnes paires est le sous-diagramme de $Pairs^{eff}$ des triplets (X, Y, i) vérifiant que $H^j(X, Y, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq j$ et $H^i(X, Y, \mathbb{Z})$ est libre.
- (2) Le diagramme $VGood^{eff}$ des très bonnes paires est le sous-diagramme de $Good^{eff}$ des triplets (X, Y, i) avec X affine, $X \setminus Y$ lisse, et ou bien X est de dimension i et Y de dimension $i - 1$, ou bien $X = Y$ est de dimension plus petite que i .

De l'inclusion des diagrammes et la functorialité de la catégorie de diagrammes, on obtient des foncteurs fidèles et exacts $\mathcal{C}(VGood^{eff}, H^*) \rightarrow \mathcal{C}(Good^{eff}, H^*) \rightarrow \mathcal{C}(Pairs^{eff}, H^*)$. Le *Basic Lemma* (1.3.4) de Nori et Beilinson énonce en particulier que les très bonnes paires abondent dans la nature. Il va permettre de montrer que ces deux foncteurs sont en fait des équivalences de catégories, et donc que $\mathcal{MM}_{Nori}^{eff}$ est engendrée par les très bonnes paires.

1.3.4. *Le Basic Lemma.* Il y en a deux versions. Seule la première sera utilisée explicitement en 1.3.13, mais la seconde sera utilisée dans la preuve de nombreux résultats que nous devons admettre. Voici donc les deux versions :

Théorème 1.3.9 (*Basic Lemma I*)

[[HM17] Theoreme 2.5.2] Soit X une variété affine de dimension n et soit $Z \subset X$ un fermé de dimension $\dim Z < n$. Alors il existe une variété $W \subset X$ contenant Z , de dimension strictement plus petite que n , vérifiant $H^i(X, W, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq n$, et $H^n(X, W, \mathbb{Z})$ est libre.

Sur un espace topologique X , un faisceau \mathcal{F} est dit faiblement constructible s'il existe une partition finie (une stratification) de X en des sous-variétés localement fermées, telles que la restriction de \mathcal{F} à chacune de ces strates soit localement constante. \mathcal{F} est dit constructible si de plus ses tiges sont des groupes abéliens de type fini. Tout faisceau constant est constructible.

Théorème 1.3.10 (*Basic Lemma II*)

[[HM17] Theoreme 2.5.7] Soit X une variété affine de dimension n et soit \mathcal{F} un faisceau faiblement constructible sur X . Alors il existe un ouvert de Zariski $j : U \rightarrow X$ tel que les assertions suivantes soient vérifiées :

- (1) $\dim(X \setminus U) < n$.
- (2) $H^q(X, \mathcal{F}') = 0$ si $q \neq n$, où $\mathcal{F}' = j_! j^* \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.
- (3) Si \mathcal{F} est constructible, $H^n(X, \mathcal{F}')$ est de type fini.
- (4) Si les tiges de \mathcal{F} sont sans torsion, $H^n(X, \mathcal{F}')$ est sans torsion.

Remarque 1.3.11. Le basic lemma II implique facilement le I (en l'appliquant à $\mathcal{F} = k_! k^* \mathbb{Z}_X$ avec $k : X \setminus Z \rightarrow X$ l'inclusion). Nous ne les démontrons pas, cela nous emmènera trop loin, bien qu'il existe des preuves directes.

1.3.5. *Filtration d'une variété affine.* C'est l'application la plus simple du Basic Lemma :

Proposition 1.3.12

Soit X une variété affine de dimension n . Il existe une filtration $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$ de X par des sous variétés fermées telles que (X_i, X_{i-1}, i) soit une très bonne paire pour chaque i .

Démonstration. On choisit un fermé W de codimension n qui contient les points singuliers de X , le basic lemma nous donne un $X_{n-1} \subset W$ tel que (X_n, X_{n-1}, n) est une très bonne paire. On continue par récurrence. Pour $n = 0$, comme on est en caractéristique nulle, $(X_0, X_{-1}, 0)$ est très bonne. \square

On dira d'une telle filtration que c'est une très bonne filtration de X .

Théorème 1.3.13

Soit X une variété affine munie d'une très bonne filtration (X_i) . Il existe des opérateurs de bord $\delta^i : H^i(X_i, X_{i+1}) \rightarrow H^{i+1}(X_{i+1}, X_i, i+1)$ qui font de la suite

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(X_i, X_{i+1}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X_{i+1}, X_i, i+1) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots$$

un complexe qui calcule la cohomologie de X . De plus, si (X'_i) est une autre très bonne filtration vérifiant $X'_i \subset X_i$ pour tout i , alors les morphismes canoniques $H^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X'_i, X'_{i-1}, \mathbb{Z})$ forment un morphisme de complexes, induisant l'identité sur la cohomologie (après identification naturelle avec la cohomologie de X des deux complexes).

Démonstration. Si $j \notin \{i, i-1\}$, la suite exacte longue de cohomologie relative pour la paire (X_i, X_{i-1}) donne la suite exacte

$$0 = H^j(X_i, X_{i-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^j(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H^j(X_{i-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{j+1}(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) = 0$$

donc un isomorphisme $H^j(X_i, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^j(X_{i-1}, \mathbb{Z})$. Si $j > i$ une récurrence immédiate donne alors $H^j(X_i, \mathbb{Z}) = H^j(X_{-1}, \mathbb{Z}) = 0$. Si $j \leq i-1$, la suite exacte en $i+1$ (alors $j \notin \{i+1, i\}$) donne $H^j(X_{i+1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^j(X_i)$ et alors $H^j(X_i, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^j(X_n, \mathbb{Z}) = H^j(X, \mathbb{Z})$.

On écrit aussi la suite exacte pour $j = i-1$:

$$H^{i-1}(X_i, X_{i-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_i} H^{i-1}(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i-1}(X_{i-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_i} H^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_i} H^i(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X_{i-1}, \mathbb{Z})$$

ce qui devient avec les simplifications précédentes :

$$0 \rightarrow H^{i-1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_i} H^{i-1}(X_{i-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_i} H^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_i} H^i(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

On pose $\delta^i = f_{i+1} \circ \pi_i$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^{i-1}(X_i, \mathbb{Z}) & & & & 0 \\
 & & \searrow \iota_i & & & & \nearrow \\
 & & & H^{i-1}(X_{i-1}, \mathbb{Z}) & & & \\
 & & \nearrow \pi_{i-1} & & \searrow f_i & & \\
 H^{i-1}(X_{i-1}, X_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & H^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^i} & H^{i+1}(X_{i+1}, X_i, \mathbb{Z}) & & \\
 & & \searrow \pi_i & & \nearrow f_{i+1} & & \\
 & & & H^i(X_i, \mathbb{Z}) & & & \\
 & & \nearrow \iota_{i+1} & & \searrow & & \\
 & & & H^i(X_{i+1}, \mathbb{Z}) & & & 0
 \end{array}$$

le diagramme est commutatif donc comme $\pi_i f_i = 0$ on obtient bien un complexe.

Comme π_{i-1} est surjective, $\text{Im} \delta^{i-1} = \text{Im} f_i$. Aussi, $\ker \delta^i = \pi_i^{-1}(\ker f_{i+1}) = \pi_i^{-1}(\text{Im} \iota_{i+1}) \xrightarrow{\sim} \text{H}^i(X_{i+1}, \mathbb{Z})$.

Soit maintenant (X'_i) une autre filtration, vérifiant $X'_i \subset X_i$ pour chaque i . On a alors les tirés en arrière $a_i : \text{H}^i(X_i, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{H}^i(X'_i, \mathbb{Z})$ et $b_i : \text{H}^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{H}^i(X'_i, X'_{i-1}, \mathbb{Z})$ ainsi que $\phi_i : \text{H}^{i-1}(X_i) \rightarrow \text{H}^{i-1}(X'_i)$. Ils font commuter pour tout i le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_i} & \text{H}^{i-1}(X_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_i} & \text{H}^i(X_i, X_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_i} & \text{H}^i(X_i, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi_i & & \downarrow a_{i-1} & & \downarrow b_i & & \downarrow a_i & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X'_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota'_i} & \text{H}^{i-1}(X'_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f'_i} & \text{H}^i(X'_i, X'_{i-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi'_i} & \text{H}^i(X'_i, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

à partir d'ici notons $\text{H}^j(Y)$ pour $\text{H}^j(Y, \mathbb{Z})$. En reprenant l'argument montrant que $\text{H}^{i-1}(X_i) \xrightarrow{\sim} \text{H}^{i-1}(X)$, on trouve en fait une suite de carrés commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{H}^{i-1}(X_i) & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X_{i+1}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X_n) = \text{H}^{i-1}(X) \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow & & & & \downarrow Id^* \\ \text{H}^{i-1}(X'_i) & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X'_{i+1}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \text{H}^{i-1}(X'_n) = \text{H}^{i-1}(X) \end{array}$$

Comme les lignes sont des isomorphismes, ϕ_i est un isomorphisme, qui devient l'identité de $\text{H}^{i-1}(X)$ après identification des deux côtés.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{H}^{i-1}(X_{i-1}) & & \\ & & & & \nearrow \pi_{i-1} & & \\ & & & & \text{H}^{i-1}(X_{i-1}, X_{i-2}) & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{H}^i(X_i, X_{i-1}) & \xrightarrow{\delta^i} & \text{H}^{i+1}(X_{i+1}, X_i) \\ & & & & \searrow a_{i-1} & & \searrow \pi_i & & \nearrow f_{i+1} \\ & & & & & & \text{H}^i(X_i) & & \\ & & & & & & \nearrow \iota_{i+1} & & \searrow b_{i+1} \\ & & & & & & \text{H}^i(X_{i+1}) & & \\ & & & & & & \searrow a_i & & \\ & & & & & & \text{H}^i(X'_i) & & \\ & & & & & & \nearrow \iota'_{i+1} & & \\ & & & & & & \text{H}^i(X'_{i+1}) & & \\ & & & & & & \searrow f'_{i+1} & & \\ & & & & & & \text{H}^{i+1}(X'_{i+1}, X'_i) & & \\ & & & & & & \nearrow \pi'_i & & \\ & & & & & & \text{H}^i(X'_i, X'_{i-1}) & \xrightarrow{\delta^{i'}} & \text{H}^{i+1}(X'_{i+1}, X'_i) \\ & & & & & & \nearrow \pi'_{i-1} & & \\ & & & & & & \text{H}^{i-1}(X'_{i-1}) & \xrightarrow{\delta^{i-1}'} & \text{H}^i(X'_i, X'_{i-1}) \\ & & & & & & \nearrow \pi'_{i-1} & & \\ & & & & & & \text{H}^{i-1}(X'_{i-1}, X'_{i-2}) & \xrightarrow{\delta^{i-1}'} & \text{H}^i(X'_i, X'_{i-1}) \end{array}$$

Le morphisme induit par b_i sur la cohomologie est donc ϕ_i , donc après identification avec $\text{H}^\bullet(X)$ c'est l'identité. \square

Cette filtration est l'analogie de la filtration d'un CW-complexe par ses cellule de dimension i , le théorème 1.3.13 est d'ailleurs identique dans ce cas comme on peut le lire dans le théorème 3.5 de [Hat00].

1.3.6. *Complexes de variétés.* Grace à 1.3.12, on peut montrer le résultat suivant :

Définition 1.3.14

On note $\mathbb{Z}[Var]$ la catégorie dont les objets sont la variétés (séparée) et vérifiant $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[Var]}(X, Y) = \bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}[\text{Hom}_{Var}(X_i, Y_j)]$, avec $X = \coprod_i X_i$ et $Y = \coprod_j Y_j$ les décompositions en composantes connexes, et $\mathbb{Z}[S]$ le groupe abélien libre engendré par un ensemble S .

Soit R un anneau noetherien plat sur \mathbb{Z} et \mathcal{A} un catégorie abélienne munie d'un foncteur $f : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$ fidèle et exacte. On suppose qu'on a une représentation $T : V\text{Good}^{eff} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $f \circ T$ coïncide avec H^* .

Proposition 1.3.15

Alors il existe un foncteur triangulé

$$(1.3.1) \quad R : \mathbf{C}^b(\mathbb{Z}[Var]) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$$

vérifiant pour toute bonne paire (X, Y, i) le groupe $H^j(R(\text{cone}(Y \rightarrow X))) = 0$ si $j \neq i$ et $H^i(R(\text{cone}(Y \rightarrow X))) = T(X, Y, i)$. De plus pour $X \in Var$, l'image de $R(X)$ dans $\mathbf{D}^b(R\text{-mod})$ calcule la cohomologie de X .

Le basic lemma va permettre grace à 1.3.12 de récupérer l'information cohomologique des variétés affines à partir de l'information qu'on a sur les variétés lisses. La proposition 1.3.15 dit qu'on peut récupérer l'information de n'importe quelle variété (et même d'une variété simpliciale) à partir de l'information qu'on connaît sur les variétés lisses. Il faut donc passer de l'information sur des variétés affines à de l'information sur des variétés quelconques. L'outil pour cela est bien connu :

1.3.7. *Complexes de Čech.* La construction de la filtration de 1.3.12 est fonctorielle : si on a deux filtrations différente on pourra toujours en trouver (encore une fois, à l'aide du basic lemma) une troisième qui les raffine toutes les deux. Également, si on a un morphisme $X \rightarrow X'$ et une filtration $F_\bullet X$ sur X , on pourra toujours trouver une filtrations $F_\bullet X'$ sur X' telle que $f(F_i X) \subset F_i X'$. On voudrait utiliser des recouvrements affines et des complexes de Čech pour passer d'une variété quelconque à des variétés affines. Pour obtenir en résultat final une functorialité satisfaisante, [HM17] (en 9.2.7) introduisent des recouvrements rigidifiés :

Définition 1.3.16

Soit X une variété. Un recouvrement rigidifié $(U_i)_{i \in I}$ de X est un recouvrement ouvert de X par un nombre fini d'affines et une application $\varphi : X \rightarrow I$ qui vérifie $x \in U_{\varphi(x)}$ pour chaque $x \in X$. On demande de plus que φ soit surjective : chaque ouvert sert.

Si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme est $((U_i)_{i \in I}, \varphi)$, $((V_j)_{j \in J}, \psi)$ sont des recouvrements rigidifiés de X et X' , un morphisme de recouvrements entre (U_i) et (V_j) au dessus de f est une application $\sigma : I \rightarrow J$ vérifiant $f(U_i) \subset V_{\sigma(j)}$ et $\psi(f(x)) = \sigma(\varphi(x))$ pour tout $x \in X$.

Remarque 1.3.17. Cette rigidification rend σ unique si elle existe.

Le systeme projectif des recouvrement rigides est filtré, et est fonctoriel sur Var : si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés, alors cela définit un pull-back entre les recouvrements rigides sur Y vers ceux sur X .

On étend la définition à des complexes de variétés :

Définition 1.3.18

Soit $X_\bullet \in \mathbf{C}_b(\mathbb{Z}[Var])$. Un recouvrement rigide de X_\bullet est la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, d'un recouvrement rigide $(U_i^{(n)})$ de X_n et pour chaque $d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ un morphisme de recouvrements rigides au dessus de d_n .

Comme pour le cas d'une variété simple, les recouvrements rigides de complexes de variété forment un système projectif filtrant, et fonctoriel.

Pour arriver au résultat promis de 1.3.15, il faut combiner filtration et recouvrements. Mais d'abord, le complexe de Čech :

Définition 1.3.19

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement rigide d'une variété X . On définit le complexe de Čech associé à \mathcal{U} par $\check{C}_n(\mathcal{U}) = \prod_{\underline{i} \in I_n} \bigcap_{j=0}^n U_{i_j}$ et les différentielles étant $\sum_{i \in I_n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_{i_j}$ avec I_n l'ensemble des $(n+1)$ -uplets $\underline{i} = (i_0, \dots, i_n)$ d'éléments de I , et $\partial_{i_j} : \bigcap_{l=0}^n U_{i_l} \rightarrow \bigcap_{l \neq j} U_{i_l}$ est l'inclusion.

Remarque 1.3.20. Si \mathcal{F} est un préfaisceau abélien sur X , alors $(\check{C}_{\mathcal{U}}^n(\mathcal{F}))_n := (\mathcal{F}(\check{C}_n(\mathcal{U})))_n$ est le complexe de Čech usuel.

Pour un faisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X , nous noterons $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ le préfaisceau de groupes abéliens $V \mapsto H^q(V, \mathcal{F})$. On a alors le résultat suivant :

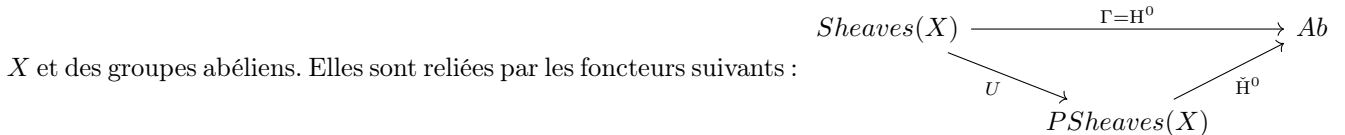
Théorème 1.3.21 (Suite Spectrale Čech-vers-Cohomologie ([Stacks] Tag 03OU))

Soit \mathcal{F} un faisceau abélien sur un espace topologique X . Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Alors il existe une suite spectrale convergente

$$E_1^{p,q} = \check{C}_{\mathcal{U}}^q(\mathcal{H}^p(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

De plus, si \mathcal{V} est un recouvrement raffinant \mathcal{U} on a un morphisme naturel de suite spectrale $E_{1,\mathcal{V}} \rightarrow E_{1,\mathcal{U}}$ devenant l'identité sur la limite.

Démonstration. On considère les catégories $Sheaves(X)$, $PSheaves$, Ab des faisceaux, préfaisceaux sur



avec Γ les sections globales, U le foncteur d'oubli et \check{H}^0 le foncteur de la cohomologie de Čech défini par $\check{H}^0(\mathcal{F}) = \ker \left(\bigoplus_i \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \right)$. La propriété de faisceau donne que le triangle précédent commute. De plus, un faisceau injectif I est un préfaisceau injectif, en effet, si on a $M \rightarrow N$ une injection de préfaisceaux avec $M \rightarrow I$ un morphisme de préfaisceaux, avec en passant au faisceautisé $(\cdot)^\sharp$ (opération exacte à gauche), on obtient un prolongement de $M^\sharp \rightarrow I = I^\sharp$ à N^\sharp . Alors $N \rightarrow N^\sharp \rightarrow I$ montre que UI est injectif. Dès lors on peut composer les foncteurs dérivés par le théorème de Grothendieck : $R\Gamma = R\check{H}^0 \circ RU$. Il est facile de vérifier que $R^p\check{H}^0 = \check{C}_{\mathcal{U}}^p$ et $R^pU = \mathcal{H}^p$, et la suite spectrale associée à cette composition est alors celle qu'on cherche. La propriété sur le changement de recouvrement vient du fait que le triangle commutatif de foncteurs ci dessus reste le même après changement : $\check{H}_{\mathcal{U}}^0 \circ U = \check{H}_{\mathcal{V}}^0 \circ U$. \square

Maintenant la définition finale :

Définition 1.3.22

Soit X_\bullet un complexe de variétés, muni d'un recouvrement rigide $\mathcal{U}^\bullet = ((U_i^{(n)})_{i \in I^{(n)}})_{n \in \mathbb{Z}}$. Une très bonne filtration sur X_\bullet est la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ et chaque $J \subset I^{(n)}$ d'une très bonne filtration $F_\bullet \left(\bigcap_{j \in J} U_j^{(n)} \right)$ compatible avec toutes les inclusions $J \subset J'$ et avec les morphismes $X_n \rightarrow X_{n-1}$. Par récurrence, les complexes étant bornés, une telle filtration existe toujours, et leur ensemble forme un système projectif filtrant et fonctoriel.

On arrive maintenant à la preuve de 1.3.15 :

Démonstration. Soit X_\bullet un complexe de variétés. On en prend une très bonne filtration. On considère, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le double complexe borné $(T(F_i C_j(\mathcal{U}^{(n)}), F_{i-1} C_j(\mathcal{U}^{(n)})))_{i,j \in \mathbb{Z}}$, dont on prend

le complexe total qu'on note $\tilde{R}(X_n)$. $(\tilde{R}(X_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un complexe qu'on note $R(X_\bullet)$. Tout autre choix de recouvrement donnera un objet isomorphe à $R(X_\bullet)$ car l'image de $R(X_\bullet)$ par le foncteur conservatif $\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}^b(R\text{-mod})$ calcule la cohomologie de X_\bullet : D'abord, pour X une variété simple, le complexe \tilde{R} est en fait la page 0 de la suite spectrale Cech-vers-cohomologie 1.3.21, passer à la page 1 revient à calculer la cohomologie sur les lignes, c'est à dire transformer l'information de la filtration en cohomologie de l'espace total. Les propriétés d'invariance malgré les changements sur la suite exacte longue associée à la filtration, et sur la suite spectrale montrent que l'objet $\tilde{R}(X)$ est bien défini dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Pour le définir sur les flèches il suffit de raffiner des filtrations et recouvrement pour obtenir une situation où l'on peut définir $R(f)$. La propriété sur le cone vient du fait que pour une bonne paire (X, Y, Z) , $Y \rightarrow X$ est une filtration et un recouvrement. \square

1.3.8. *Les trois diagrammes donnent la même catégorie.* Rappelons nous de la situation : on a trois diagrammes $V\text{Good}^{\text{eff}} \subset \text{Good}^{\text{eff}} \subset \text{Pairs}^{\text{eff}}$ qui induisent des foncteurs $\mathcal{C}(V\text{Good}^{\text{eff}}, H^*) \rightarrow \mathcal{C}(\text{Good}^{\text{eff}}, H^*) \rightarrow \mathcal{C}(\text{Pairs}^{\text{eff}}, H^*) = \mathcal{MM}_{\text{Nori}}^{\text{eff}}$. Par 1.1.12 il suffit, pour montrer que ce sont des équivalences de catégories, de représenter Pairs dans $\mathcal{C}(V\text{Good}^{\text{eff}}, H^*) =: \mathcal{A}$. On applique 1.3.15 qui nous donne un foncteur triangulé $R : \mathbf{C}^b(\mathbb{Z}[\text{Var}]) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ et on pose $S(X, Y, i) = H^i(R(\text{cone}(Y \rightarrow X)))$, qui convient. Ce résultat permet de travailler avec des très bonnes paires à la place de simples paires. Notamment, il est utilisé pour construire la structure multiplicative. En effet la formule de Kunneth est multiplicative $(\mathbb{H}^{p+q}(X \times X', Y \times Y) \simeq \mathbb{H}^p(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{H}^q(X', Y')$ pour (X, Y, p) et (X', Y', q) dans $V\text{Good}^{\text{eff}}$ pour les très bonnes paires et va permettre de donner à $\mathcal{MM}_{\text{Nori}}^{\text{eff}}$ une structure tensorielle, qui grace à un critère de Nori (dont les conditions sont données par la dualité de Poincaré) sera rigide une fois qu'on aura inversé le motif correspondant à \mathbb{G}_m ⁸. On obtient alors un groupe pro-algébrique qu'on appelle *groupe de Galois motivique*. On ne rentrera pas dans les détails car cela ne sera pas utilisé par la suite : les 1-motifs ne sont pas stable par produit.

1.4. **Conventions homologiques.** La même construction peut se faire en conventions homologiques : il suffit de retourner toutes les flèches du diagramme $\text{Pairs}^{\text{eff}}$ pour obtenir (et se placer dans les notations de [AB15]) le diagramme ${}^D\text{Sch}_k$ des k -schémas. En prenant la catégorie des diagramme de la représentation $H_\bullet : (X, Y, i) \mapsto H_i(X, Y, \mathbb{Z})$ l'homologie singulière, on obtient la catégorie EHM des motifs de Nori homologique (la notation eff est oubliée ici, elle est contenue dans le "E"). Elle est aussi universelle pour les théories homologiques se comparant à l'homologie singulière. C'est le cas de l'homologie de De Rham ou l'homologie ℓ -adique (obtenue par dualité à partir de la cohomologie du même nom).

On notera $\tilde{H}_i(X, Y)$ l'image de (X, Y, i) par $\overline{H}_\bullet : {}^D\text{Sch}_k \rightarrow \text{EHM}$.

1.5. **Comparaison avec d'autres catégories de motifs.** Une des grandes réussite des motifs est la construction de foncteur reliant la catégorie des motifs de Nori à d'autres catégories motiviques.

1.5.1. *Motifs géométriques.* Comme il a surement été dit dans l'introduction, la catégorie des motifs mixtes étant trop difficile à construire, de la recherche a été faite pour trouver une catégorie triangulée donc le coeur serait la catégorie des motifs mixtes. Dans ce sens se trouve la catégorie des motifs de Voevodsky dont il est donné un bref résumé en 2. Un espoir pour la théorie des motifs de Nori est le suivant (le foncteur a été construit par Nori) :

Théorème 1.5.1 (Harrer [Har16] Theorem 7.4.17)

Il existe un foncteur triangulé

$$\Gamma : \text{DM}_{gm}^{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{MM}_{\text{Nori}}^{\text{eff}})$$

tel que la composition $\text{DM}_{gm}^{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{MM}_{\text{Nori}}^{\text{eff}}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathbb{Z}\text{-mod})$ est la réalisation singulière des motifs géométriques.

7. Un foncteur fidèle et exact entre catégories abéliennes induit un foncteur conservatif entre catégories dérivées.

8. On a une représentation canonique $\overline{H}^* : \text{Pairs}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{MM}_{\text{Nori}}^{\text{eff}}$ et on inverse $H^*(\mathbb{G}_m, \emptyset, 1)$ le motif de Lefchetz pour obtenir une catégorie $\mathcal{MM}_{\text{Nori}}$.

Le foncteur se construit en utilisant fortement le basic lemma 1.3.10 et généralise le résultat 1.3.15 aux correspondances finies (voir en 2).

1.5.2. *Réalisation mixtes.* Soit $\sigma : k \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement.

Définition 1.5.2

La catégorie \mathcal{MR}^σ des réalisations mixtes est la catégorie dont les objets sont les familles $(V_B, V_{dR}, V_2, V_3, V_5, \dots, V_\ell, \dots)$ avec

- (1) Un groupe abélien V_B muni d'une filtration croissante W_\bullet sur $V_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la filtration de poids.
- (2) Un k espace vectoriel V_{dR} muni d'une filtration décroissante F^\bullet appelée filtration de poids.
- (3) Pour chaque nombre premier ℓ un \mathbb{Z}_ℓ -module de type fini muni d'une action du groupe de Galois $Gal(\bar{k}/k)$.
- (4) Un isomorphisme de comparaison $V_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq V_{dR} \otimes_k \mathbb{C}$ faisant de $(V_B, V_{dR} \otimes_k \mathbb{C}, W_\bullet, F^\bullet)$ une structure de Hodge mixte.
- (5) Pour chaque nombre premier ℓ un isomorphisme de comparaison $M_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \simeq M_\ell$.

Les morphismes sont les familles de morphismes termes par terme, respectant structure et comparaisons.

1.3.7 donne l'existence d'un foncteur $R : \mathcal{MM}_{Nori}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{MR}^\sigma$ tel que la composition avec n'importe quelle projection soit la cohomologie en question.

1.5.3. *Motifs de torsion.* Dans le cours qu'il a donné au TIFR ([Fak00]), Nori a montré un résultat sur les motifs de Nori qui n'ont que de la torsion :

On définit $\mathcal{MM}_t^{\text{eff}}$ comme la sous catégorie des motifs de Nori ayant une réalisation singulière de torsion. Le résultat est le suivant :

Théorème 1.5.3 ([Fak00], Theorem 6.1)

$\bar{H}^\bullet : \mathcal{MM}_t^{\text{eff}} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}}^{\text{fini}}(Gal(\bar{k}/k))$ des motifs de Nori de torsion vers les $Gal(\bar{k}/k)$ - \mathbb{Z} -modules finis (c'est à dire, de cardinal fini) est une équivalence de catégorie.

Démonstration. Nous ne feront qu'esquisser la preuve, qui est très élaborée pour un résultat qui peut sembler facile.

Nori observe d'abord que si X est une variété, alors on a une injection $H^0(X) \rightarrow \prod_{x \in X \text{ fermé}} H^0(x)$. Les points fermés de X sont de la forme $\text{Spec} L$ avec L/k finie, donc on a besoin de connaître $H^0(\text{Spec} L)$. Pour L finie et Galois sur k , $H^0(\text{Spec} L) \simeq \mathbb{Z}[Gal(L/k)]$ comme $Gal(\bar{k}/k)$ -modules. Dès lors $\mathbb{Z}[Gal(L/k)]$ est égal à $\text{End}(H_{\{D\}}^\bullet)$ pour $D = (\text{Spec} L, \emptyset, 0)$. Dès lors tout module de type fini sur $\mathbb{Z}[Gal(L/k)]$ est canoniquement un élément de $\mathcal{MM}_{Nori}^{\text{eff}}$. On obtient alors un foncteur fidèle et exact entre les représentation continues de $G_k = Gal(\bar{k}/k)$ qui sont des \mathbb{Z} modules de type fini dans la catégorie $\mathcal{MM}_{Nori}^{\text{eff}}$. En particulier, en se restreignant à la catégorie des G_k modules finis on obtient des foncteurs

$$\text{Rep}_{\mathbb{Z}}^{\text{fini}}(Gal(\bar{k}/k)) \xrightarrow{i} \mathcal{MM}_t^{\text{eff}} \xrightarrow{j} \text{Rep}_{\mathbb{Z}}^{\text{fini}}(Gal(\bar{k}/k))$$

tel que $j \circ i$ est l'identité. Il suffit donc de montrer que i est essentiellement surjectif. Pour ce faire, Nori développe une machinerie assez sophistiquée.

D'abord, à l'aide du basic lemma 2 1.3.10 il montre que pour tout faisceau étale \mathcal{F} constructible dont les tiges sont des \mathbb{Z} -modules de type fini, $H^n(X, \mathcal{F}_{top})$ est naturellement un élément de $\mathcal{MM}_{Nori}^{\text{eff}}$. Ce qui permet de construire un foncteur $\text{Sheaves}(X_{et}) \rightarrow \mathcal{MM}_{Nori}^{\text{eff}}$ qui se prolonge sur les catégories dérivée bornées. Ensuite si (X, Y, n) est un triplet de $\text{Pairs}^{\text{eff}}$, $H^n(X, Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est dans l'image de i puisque c'est l'image du G_k -module de type fini $H^n(X, Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = H^n(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = j_! \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $j : X \setminus Y \rightarrow X$ et \mathcal{F} est un faisceau étale fini dont la cohomologie est donc un G_k module fini.

Ensuite si on prend (X, Y, n) un triplet tel que $H^n(X, Y, \mathbb{Z})$ est de torsion, annulé par un entier N , la suite exacte de faisceau $0 \rightarrow j_! \mathbb{Z} \xrightarrow{N} j_! \mathbb{Z} \rightarrow j_! \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow 0$ fournit un bout de suite exacte longue

$H^n(X, Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{N} H^n(X, Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, la multiplication par N étant nulle, $H^n(X, Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = i(\mathcal{F})$ est injective. Alors $jH^n(X, Y, \mathbb{Z}) \subset ji\mathcal{F} = \mathcal{F}$ et $ijH^n(X, Y, \mathbb{Z}) \subset i\mathcal{F}$ donc les deux sous-objets $H^n(X, Y, \mathbb{Z})$ et $ijH^n(X, Y, \mathbb{Z})$ de $H^n(X, Y, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = i\mathcal{F}$ coïncident après application du foncteur fidèle et exact, donc sont isomorphes : $H^n(X, Y, \mathbb{Z}) \simeq i(j(H^n(X, Y, \mathbb{Z})))$ est dans l'image de i , ce qui termine la preuve. \square

2. MOTIFS DE VOEVODSKY

Les motifs de Voevodsky sont une catégories triangulée qui pourrait être la catégorie dérivée de la catégorie des motifs. Pour tous les résultats, nous renvoyons à [Dég02] ou [Voe11] pour plus de détails. On commence par des définitions :

2.1. Correspondances finies. Soit X, Y deux variétés lisses. L'ensemble $c(X, Y)$ des correspondances finies entre X et Y est le groupe abélien libre sur l'ensemble des sous-schémas fermés intègres $W \subset X \times Y$ tels que la projection sur X soit finie et surjective sur une composante irréductible de X . On peut définir la composition⁹ des correspondances finies, ce qui permet de définir la catégorie Sm_k^{Cor} dont les objet sont les variétés lisses et les morphismes les correspondances finies.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés, son graphe définit naturellement une correspondance finie $X \rightarrow Y$ donc on peut voir Sm_k la catégorie des variétés lisses comme une sous catégorie de Sm_k^{Cor} . Sm_k^{Cor} est une catégorie additive.

2.1.1. Motifs géométriques. $\mathbf{K}^b(Sm_k^{Cor})$ est une catégorie triangulée. On peut définir la catégorie des motifs géométriques à partir d'elle :

Définition 2.1.1 (*Motifs Géométriques effectifs*)

La catégorie DM_{gm}^{eff} des motifs géométriques effectifs est la catégorie triangulée obtenue en localisant comme catégorie triangulée $\mathbf{K}^b(Sm_k^{Cor})$ par rapport à

(1) Pour tout $X \in Sm_k$, $X \times \mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ (homotopie)

(2) Pour tout recouvrement $X = U \cup V$ par des ouverts de Zariski, notant $i_U : U \rightarrow X$ et $i_V : V \rightarrow X$ (idem pour i_U) et $j_V : V \rightarrow X$ (idem pour U)

$$\text{cone}\left(U \cap V \xrightarrow{i_U \oplus -i_V} U \oplus V\right) \xrightarrow{j_U + j_V} X$$

(Mayer-Vietoris)

C'est à dire qu'on inverse ces deux classes d'applications.

2.2. Faisceaux avec transfert. Il existe aussi une construction faisceautique de DM_{gm}^{eff} . On considère d'abord $PShv^{tr}(k)$ ("PreSheaves with Transfert") la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens sur Sm_k^{Cor} . Ensuite on définit sur Sm_k/X (pour chaque X) la topologie de Nisnevich X_{Nis} dont les recouvrements sont les morphismes étales de type fini $\mathcal{U} \rightarrow X$ tel que pour toute extension de type fini E de k , $\mathcal{U}(E) \rightarrow X(E)$ est surjective. On définit alors $Sh_{Nis}^{Tr}(k)$ la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transfert comme la sous catégorie de $PShv^{tr}(k)$ des préfaisceaux dont la restriction à X_{Nis} est un faisceau pour tout $X \in Sm_k$. À tout préfaisceau \mathcal{F} sur Sm_k^{Cor} , on peut associer un faisceautisé avec transferts \mathcal{F}_{Nis} pour la topologie de Nisnevich.

9. Si on a $\alpha \in c(X, Y), \beta \in c(Y, Z)$, notant p, r, q les projections de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y, X \times Z, Y \times Z$, $p^*\alpha$ et $q^*\beta$ sont des cycles bien définis de $X \times Y \times Z$ qui s'intersectent proprement, ce qui permet de définir grâce à la formule d'intersection avec des *Tor* de Serre le cycle $\gamma = p^*\alpha \cdot q^*\beta$ qui est un cycle. On prend T son support, et notant $h = qr_T$, on définit $\beta \circ \alpha$ comme $h_*\gamma$.

Proposition 2.2.1

Dans Sm_k , on appelle carré distingué de Nisnevich un carré

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

avec p étale, j une immersion ouverte, et notant $Z = (X \setminus U)_{red} \subset X$, $p^{-1}(Z) \rightarrow Z$ est un isomorphisme. Alors on a la propriété suivante : Un préfaisceau avec transferts $F \in PShv^{tr}(k)$ est un faisceau pour la topologie de Nisnevich si et seulement si pour tout carré distingué de Nisnevich \square , $F(\square)$ est cocartésien.

Un préfaisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur Sm_k est dit *invariant par homotopie* si pour tout $X \in Sm_k$, le morphisme induit par la projection $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}_k^1)$ est bijectif.

Si pour tout $q \geq 0$, le préfaisceau $X \mapsto H^q(X_{Nis}, \mathcal{F}_{Nis})$ est invariant par homotopie on dit que \mathcal{F} est *strictement invariant par homotopie*.

Définition 2.2.2

La catégorie DM_{-}^{eff} est la sous-catégorie pleine de $Shv_{Nis}^{Tr}(k)$ constituée des objets strictement invariants par homotopie.

2.2.1. *Localisation.* On peut en fait voir DM_{-}^{eff} comme une localisation de $Shv_{Nis}^{Tr}(k)$:

Définition 2.2.3

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, le n -simplexe géométrique est $\Delta^n = \text{Spec}(k[t_0, \dots, t_n]/(\sum_i t_i - 1))$. Pour $0 \leq i \leq n$, $\partial_i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$ donnée par l'inclusion $P(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto P(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$ fait de Δ^\bullet un schéma cosimplicial.
- (2) Pour $\mathcal{F} \in PShv(Sm_k)$, On considère $X \mapsto C_i^{Sus}(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(X \times \Delta^i)$, en posant $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^n \mathcal{F}(\partial_i)$ on obtient un complexe de préfaisceaux appelé complexe de Suslin.

Remarques 2.2.4.

Si \mathcal{F} est un préfaisceau avec transferts (resp. un faisceau avec transferts), $C_{\bullet}^{Sus}(\mathcal{F})$ est un complexe de préfaisceaux avec transferts (resp de faisceaux avec transfert).

les préfaisceaux d'homologie $h_i(\mathcal{F}) := \mathcal{H}^{-i}(C_{\bullet}^{Sus}(\mathcal{F}))$ est invariant par homotopie donc les faisceaux de Nisnevich associés $h_i^{Nis}(\mathcal{F})$ sont strictement invariants par homotopie pour \mathcal{F} dans $PShv^{tr}$. On obtient donc un foncteur

$$C_{\bullet} : PShv^{tr}(k) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}$$

qui se factorise par la faisceautisation $Pshv^{tr}(k) \rightarrow Shv_{Nis}^{tr}(k)$.

en prenant le complexe total du double complexe evident, on peut prolonger ce foncteur pour obtenir un foncteur $K^{-}(PShv^{tr}(k)) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}$.

On définit $\mathbb{Z}_{tr}(X) = c(\cdot, X)^{Nis}$ le faisceau avec transferts associé au foncteur représentable $c(\cdot, X)$ pour $X \in Sm_k$. On notera aussi $h_i^{Nis}(C) := h_i^{Nis}(\mathbb{Z}_{tr}(C))$.

Le résultat est le suivant :

Théorème 2.2.5 (Localisation)

Le foncteur $C_{\bullet} : \mathbf{C}^{-}(Shv_{Nis}^{tr}(k)) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}$ descend en un foncteur

$$\mathbf{RC}_{\bullet} : \mathbf{D}^{-}(Shv_{Nis}^{tr}(k)) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}$$

adjoint à gauche de l'inclusion $\mathbf{D}^{-}(Shv_{Nis}^{tr}(k)) \rightarrow DM_{-}^{\text{eff}}$. Ce foncteur identifie DM_{-}^{eff} avec la localisation de $\mathbf{D}^{-}(Shv_{Nis}^{tr}(k))$ par la sous-catégorie localisante engendrée par les complexes $\mathbb{Z}_{tr}(X \times \mathbb{A}^1) \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}(X)$, $X \in Sm_k$.

2.2.2. *Plongement.* On peut plonger $\mathrm{DM}_{gm}^{\mathrm{eff}}$ dans $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}$. Le foncteur \mathbb{Z}_{tr} se prolonge naturellement en un foncteur $\mathbf{K}^b(Sm_k^{\mathrm{cor}}) \rightarrow \mathbf{D}^-(Shv_{Nis}^{tr}(k))$. On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.6 (Plongement)

Il y a un diagramme commutatif de foncteurs triangulés

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^b(Sm_k^{\mathrm{cor}}) & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{tr}} & \mathbf{D}^-(Shv_{Nis}^{tr}(k)) \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{RC}_\bullet \\ \mathrm{DM}_{gm}^{\mathrm{eff}} & \xrightarrow{i} & \mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}} \end{array}$$

tel que i est un plongement plein, d'image dense (c'est à dire que tout élément M de $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}$ est dans un triangle distingué $\bigoplus_\alpha V_\alpha \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_\beta W_\beta \xrightarrow{+}$ avec V_α, W_β dans l'image de i).
De plus, $\mathbf{RC}_\bullet(\mathbb{Z}_{tr}(X)) \simeq \mathbf{C}_\bullet(\mathbb{Z}_{tr}(X))$ pour tout $X \in \mathbf{C}^-(Shv_{Nis}^{tr}(k))$.

Pour les preuves des deux derniers théorèmes, nous renvoyons le lecteur aux sections 4-5-6 du cours 1 de *Six lectures on motives* par Marc Levine dans le volume II de [Lev+09].

2.3. **Motifs de courbes.** Un résultat dont nous allons avoir besoin est le suivant : Il mentionne la variété d'Albanese dont il est donné un rappel plus bas en 4.5.

Théorème 2.3.1 ([Voe11] Theorem 3.4.2)

Soit $p : C \rightarrow \mathrm{Spec}k$ une courbe lisse et connexe. Soit $\underline{Alb}(C)$ le faisceau de groupes abéliens sur Sm_k représenté par $\mathrm{Alb}^0(C)$ la variété d'albanese de C . Alors on a :

- (1) $h_i^{Nis}(C) = 0$ pour $i \neq 0, 1$.
- (2) $h_1^{Nis}(C) = p_*\mathbb{G}_m$ si C est propre et $h_1^{Nis}(C) = 0$ sinon.
- (3) Le noyau du morphisme (scindé) $h_0^{Nis}(C) \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}(\mathrm{Spec}k)$ est canoniquement isomorphe à $\underline{Alb}(C)$.

Ce théorème permet plusieurs choses. D'abord, par 2.2.5 $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}$ a une t -structure héritée de la t -structure canonique de $\mathbf{D}^-(Shv_{Nis}^{tr}(k))$, de coeur $HI^{tr}(k)$ les faisceaux Nisnevich avec transfert et strictement invariants par homotopie ; et par 2.2.6, le H^0 pour cette t -structure est h_\bullet^{Nis} , c'est à dire \mathbf{RC}_\bullet . En particulier, pour C une courbe lisse connexe affine, par 2.3.1, seul $h_0^{Nis}(C)$ est non nul, on a donc, dans $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}$ aussi bien que dans $\mathbf{D}^-(Shv_{Nis}^{tr}(k))$, $\mathbb{Z}_{tr}(C) \simeq h_0^{Nis}(C) \simeq \underline{Alb}(C) \oplus \mathbb{Z}_{tr}(\mathrm{Spec}k)$.

Deuxième partie 2. Interlude sur certaines classes de variétés et les 1-motifs

Cette partie contient des rappels sur le matériel nécessaire à la définition des objets de la suite du rapport.

3. RÉSEAUX ET TORES

Définition 3.0.1

Un réseau \mathcal{L} est un faisceau étale \mathbb{Z} -constructible sur $\mathrm{Spec}k$, c'est à dire un faisceau étale localement constant et dont les tiges sont des \mathbb{Z} -modules de type fini.

Après un changement de base par un recouvrement galoisien fini $X \rightarrow \mathrm{Spec}k$, \mathcal{L}_X est un faisceau constant Λ avec Λ un groupe abélien. Après ce changement de base, \mathcal{L}_X est donc représentée par le schéma (qui est alors un schéma en groupes abéliens) $X \times \Lambda := \coprod_{\lambda \in \Lambda} X$. La descente galoisienne permet alors de représenter \mathcal{L} par un schéma étale. Cette construction forme en fait une équivalence de catégories.

Définition 3.0.2

Un tore sur k est une variété en groupes T vérifiant $T(\text{Spec}\bar{k}) = (\bar{k}^\times)^r$ pour un entier r . Il existe donc une extension galoisienne K/k telle que $T(\text{Spec}K) = (K^\times)^r$.

Pour un tore T , on définit le réseau des caractères de T par $\chi(T)(S) = \text{Hom}(T \times_k S, \mathbb{G}_m \times_k S)$, S schéma étale sur k . C'est un réseau. Par exemple on a $\chi(\mathbb{G}_m^r) = \mathbb{Z}^r$ le faisceau constant en \mathbb{Z}^r . On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.0.3

Le foncteur χ réalise une équivalence de catégories entre les tores sur k et les réseaux sur k .

Démonstration. La preuve consiste à construire une quasi-inverse, ce qui est possible localement sur la topologie étale, puis on recolle à l'aide d'une descente galoisienne. \square

4. VARIÉTÉS ABÉLIENNES ET SEMI-ABÉLIENNES

4.1. Variétés abéliennes. Les variétés abéliennes sont une classe importante de variétés. La majeure partie de ce qui se trouve dans cette section vient du livre de Milne [Mil86].

Définition 4.1.1

Une variété abélienne sur un corps k est une variété propre et connexe A munie de deux morphismes

$$m : A \times_k A \rightarrow A$$

et

$$\text{inv} : A \rightarrow A$$

et d'un élément $O \in A(k)$ tels que $(A(k^{alg}), m, \text{inv}, O)$ soit un groupe.

La condition demandant à que les k^{alg} -points soient un groupe est équivalente à celle d'être un objet de groupe dans la catégorie des variétés (on écrit les axiomes d'être un objet de groupe, et le nullstellensatz assure que l'ensemble où l'axiome n'est pas vérifié est un ouvert¹⁰ contenant un k^{alg} -point s'il n'est pas vide, ce qui est impossible). Il se trouve que la combinaison des deux propriétés très rigides que sont la structure de groupe et la propriété munissent A de propriétés très confortables.

Théorème 4.1.2

Soit A une variété abélienne. Alors la loi de groupe de A est commutative, A est géométriquement irréductible (c'est à dire, A est irréductible et le reste après tout changement de base) et projective non-singulière. De plus tout morphisme de variétés entre deux variétés abéliennes est, à translation près, un morphisme de groupes.

Par abus de notation, dans la preuve ci dessous on utilisera déjà des notations additives.

Démonstration. Donnons les grandes lignes de la démonstration :

Comme toute variété, A contient un ouvert dense non singulier. Ses translatés recouvrent A donc A est non-singulière. Donc ses changements de base aussi. Par définition, pour chaque $S \rightarrow \text{Spec}k$, par chaque point non singulier de A_S ne passe qu'une seule composante irréductible de A_S . C'est pourquoi A_S est irréductible pour tout S donc A est géométriquement irréductible.

Ensuite soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de variétés entre deux variétés abéliennes. quitte à translater par un élément de B , on peut supposer que $\varphi(0) = 0$. On définit $f : A \times_k A \rightarrow B$ par $f(a, a') = \varphi(a + a') - \varphi(a) - \varphi(a')$. Soit U un voisinage ouvert affine de 0 dans B , et soit $Z = p_1(f^{-1}(B \setminus U))$. Par propriété, la projection $p_1 : A \times A \rightarrow A$ est fermée donc Z est fermé : c'est l'ensemble des $a \in A$ tels que pour tous a' , $f(a, a') \notin U$. Pour tout point $a \notin Z$, $f : \{a\} \times A \rightarrow B$ a son image dans U , et comme $\{a\} \times A \simeq A$ est propre et U affine, $f_{\{a\} \times A}$ est constante, de valeur $f(0, a) = 0$ pour tout $a \notin Z$ donc la restriction de f à $A \setminus Z \times A$ est nulle. On a $f(a, 0) = 0 \in U$ donc $A \setminus Z$ est un ouvert non

10. car tout est séparé

vide de A , donc $A \setminus Z \times A$ est un ouvert non vide, donc dense car $A \times A$ est irréductible. Comme B est séparée, f étant constante sur un ouvert dense, est constante. Dès lors tout morphisme entre deux variétés abéliennes est la composée d'une translation et d'un morphisme de groupe.

Appliquant ceci à inv , A est commutative.

La projectivité est la propriété la plus difficile à montrer. La preuve consiste à construire un diviseur D tel que $3D$ est ample, impliquant la projectivité de A . La construction repose sur le théorème du carré, qui dit qu'étant donné un fibré en droite \mathcal{L} sur A et deux k -points $a, b \in A(k)$, on a un isomorphisme $t_{a+b}^* \mathcal{L} \otimes t_a^* \mathcal{L} \simeq t_a^* \mathcal{L} \otimes t_b^* \mathcal{L}$, où t_b est la translation par b . Plus de détails sont dans le théorème 6.4 de [Mil86]. \square

Remarque 4.1.3. Le théorème du carré déjà cité énonce que l'application $\lambda_{\mathcal{L}} : A \rightarrow \text{Pic}(A)$ définie par $\lambda_{\mathcal{L}}(a) = t_a^* \mathcal{L}^{-1}$ est un morphisme de groupes. Ce morphisme permet de donner un sens à "être de degré 0" : On dira que \mathcal{L} est de degré zero si $\lambda_{\mathcal{L}} = 0$ ¹¹. On notera alors $\text{Pic}^0(A)$ l'ensemble des fibrés en droites de degré 0. Soit T une variété sur k . Une famille de fibrés en droite de degré 0 paramétrés par T est un fibré \mathcal{L} sur $A \times T$ tel que sa restriction à $\{0\} \times T$ soit trivial et chaque restriction \mathcal{L}_t à $A \times_{\{t\}}$ pour $t \in T$ soit de degré 0. Notons $\text{Pic}_T^0(A)$ leur ensemble, c'est un foncteur contravariant en T .

Une construction importante avec les variétés abéliennes est celle de la variété duale. Encore une fois ici nous ne rentrerons pas dans les détails mais le résultat est le suivant :

Théorème 4.1.4

Soit A une variété abélienne. Il existe une variété abélienne A^\vee représentant le foncteur $T \mapsto \text{Pic}_T^0(A)$. La construction est fonctorielle contravariante et on a $(A^\vee)^\vee \simeq A$. De manière plus abstraite, A^\vee est le schéma en groupes représentant $\underline{\text{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m) : S \mapsto \text{Ext}^1(A \times S, \mathbb{G}_m \times S)$.

Démonstration. La preuve consiste en construire A^\vee comme un quotient convenable de A par K le noyau de $\lambda_{\mathcal{L}}$ pour \mathcal{L} un faisceau inversible de A .

Le morphisme $(T \mapsto \text{Pic}_T^0(A)) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m)$ est le suivant (cf [Mil86] 11.3 page 121) : à \mathcal{L} , qu'on voit comme fibré en droites géométriques, on enlève 0 pour obtenir $G(\mathcal{L})$ qui est un schéma en groupes canoniquement dans $\underline{\text{Ext}}^1(A, \mathbb{G}_m)$. \square

Exemple 4.1.5. Si C est une courbe projective connexe sur un corps k , possédant d'un k -point c , on peut en définir sa *Jacobienne* $J(C)$ qui est une variété abélienne munie d'un morphisme $\tau_c : C \rightarrow J(C)$ envoyant c sur 0 et universel pour cette propriété : Tout morphisme de variétés $g : C \rightarrow A$ de C dans une variété abélienne A envoyant c sur 0 se factorise de manière unique par $J(C)$, c'est à dire qu'il existe $f : J(C) \rightarrow A$ un morphisme de variétés abéliennes vérifiant $f \circ \tau_c = g$. Si n est assez grand, $\tau_c^n : C^n \rightarrow J(C)$ est surjective, et c'est d'ailleurs comme ça que l'on construit $J(C)$: ce morphisme se factorise par $C^{(n)}$ le quotient de C^n par l'action du groupe symétrique (puisque en réalité, il envoie (c_1, \dots, c_n) sur $\sum_i \tau_c(c_i)$ expression bien sûr symétrique), puis en quotientant $C^{(n)}$ par l'action d'un groupe bien choisi on obtient $J(C)$.

Cette jacobienne $J(C)$ représente le foncteur $\text{Pic}^0(C) : S \mapsto \text{Pic}_S^0(C)$, où $\text{Pic}_S^0 = \{\mathcal{L} \in \text{Pic}(C \times S) \mid \deg \mathcal{L}_s = 0, \forall s \in S\} / \text{Im}(\text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(C \times S))$. Ici $\mathcal{L}_t = i_{t*} \mathcal{L}$, avec $i_t : C \rightarrow C \times T$ donnée par $i_t(c) = (c, t)$. On dispose d'un théorème d'auto dualité (voir partie 6 du chapitre III du cours de Milne sur les variétés abéliennes [Mil20]) : $J(C) \simeq (J(C))^\vee$.

4.2. Isogénies et structure des variétés abéliennes. La catégorie des variétés abéliennes est presque abélienne.

Définition 4.2.1

Un morphisme entre deux variétés abéliennes $f : A \rightarrow B$ est une isogénie s'il est surjectif et que son noyau est un schéma en groupes fini, c'est à dire qu'il est de dimension nulle.

Modulo isogénies, la catégorie des variétés abéliennes est semi-simple abélienne :

¹¹. C'est cohérent avec la notion de degré zéro sur une courbe puisqu'on peut montrer que sur une courbe elliptique, c'est à dire une variété abélienne de dimension 1, $\lambda_{\mathcal{L}} = (\deg \mathcal{L})^2 \lambda_{\mathcal{L}}$.

Théorème 4.2.2

Pour toute variété abélienne A , il existe des sous-variétés A_1, \dots, A_n simples telles que l'application (a_1, \dots, a_n) soit une isogénie de $\prod_i A_i \rightarrow A$.

Démonstration. La preuve est par récurrence, il suffit de montrer que si B est une sous variété abélienne de A il existe une autre sous variété abélienne B' de A telle que $B \times B' \rightarrow A$ soit une isogénie. On prend $i : B \rightarrow A$, et $\lambda_{\mathcal{L}} : A \rightarrow A^{\vee}$ (4.1.3) pour un \mathcal{L} ample. Alors $i^{\vee} \circ \lambda_{\mathcal{L}} : A \rightarrow B^{\vee}$ a un noyau dont la composante connexe de l'identité est B' , dont on peut montrer (voir [Mil20] théorème 10.1) que c'est une variété abélienne qui vérifie la propriété voulue. \square

4.3. Variétés Abéliennes comme quotients de Jacobiennes. Énonçons d'abord, sans la montrer, une version du théorème de Bertini :

Théorème 4.3.1

Soit X une variété lisse projective dont on choisit un plongement $X \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ dans un espace projectif. Soit Z un fermé fini de X , alors il existe un hyperplan H de \mathbb{P}^N vérifiant $H \cap X$ est lisse, X n'est pas contenu dans H et H contient Z .

Démonstration. Pour la preuve, nous renvoyons au Corollaire 3.3 de [GK20] où le résultat est démontré dans une généralité bien plus grande (notamment en relaxant l'hypothèse de lissité). \square

On montre le résultat suivant :

Théorème 4.3.2

Soit A une variété abélienne et $Z \subset A$ un fermé de dimension 0. Il existe une courbe projective non singulière $C \subset A$ contenant Z telle que le morphisme induit par la propriété universelle $Jac(C) \rightarrow A$ soit surjectif.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Bertini : d'abord on choisit un plongement $A \rightarrow \mathbb{P}^N$. Ensuite on peut prendre un hyperplan H de \mathbb{P}^N ne contenant pas A , contenant Z et vérifiant que $H \cap A$ est lisse. Par le haupfidealsatz la dimension de $H \cap A$ est au plus celle de A moins un, donc on peut réitérer le procédé jusqu'à trouver la courbe C . Il a alors un morphisme $C \rightarrow A$ donc $J(C) \rightarrow A$. On note A_1 l'image de cette dernière application. Par 4.2.2, il y a donc une autre sous variété abélienne A_2 de A telle que $A_1 \times A_2 \rightarrow A$ est une isogénie. En particulier, $A_1 \cap A_2$ est fini. Comme $C \subset A_1$, $C \cap A_2$ est fini aussi. Soit $f : A_1 \times A_2 \rightarrow A$ donnée par $(a_1, a_2) \mapsto a_1 + 2a_2$. Alors $f^{-1}(C)$ n'est pas géométriquement irréductible puisque $p_2^{-1}(f^{-1}(C)) = Mult_2^{-1}(A_2 \cap C)$ n'est pas connexe. Or on dispose du lemme suivant :

Si $Z \subset V$ est une section hyperplane relativement à un plongement dans un plan projectif, alors pour toute application finie $f : W \rightarrow V$, $f^{-1}(Z)$ est géométriquement irréductible, car c'est le support d'un diviseur ample. La preuve du lemme est en 10.3 de [Mil20]. \square

4.4. Variétés Semi-Abéliennes. Ce sont des variétés qui seront beaucoup utilisées dans la suite.

Définition 4.4.1

Une variété semi-abélienne est une variété en groupes S qui est l'extension d'une variété abélienne par un tore :

$$0 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow 0$$

est exacte pour T un tore et A une variété abélienne.

4.5. Variété D'Albanese. Pour des courbes projectives, on peut définir la jacobienne qui représente le foncteur $\text{Pic}^0(C)$. Cette variété a la propriété universelle que citée en 4.1.5. Cette propriété est en fait celle de la variété d'albanese :

Théorème 4.5.1

Soit X une variété sur un corps k , munie d'un k -point x . Il existe une variété semi-abélienne $\text{Alb}^0(X)$ avec un morphisme $\tau_x : X \rightarrow \text{Alb}^0(X)$ envoyant le k -point choisi sur 0, et universel pour cette propriété : Tout morphisme $f : X \rightarrow S$ de X dans une variété semi-abélienne envoyant le k -point sur 0 se factorise par τ_x , i.e. il existe un morphisme de variétés semi-abéliennes $\varphi : \text{Alb}^0(X) \rightarrow S$ vérifiant $\varphi \circ \tau_x = f$.

Pour la preuve, nous renvoyons à [Ser59b], théorème 7.

Proposition 4.5.2

- (1) Si X est une variété propre, alors $\text{Alb}^0(X)$ est canoniquement isomorphe à la variété de Picard de X , c'est à dire à la variété représentant $\text{Pic}^0(X)$ les classes de fibrés en droites algébriquement équivalents à 0. C'est donc une variété abélienne.
- (2) Si Y est non singulier, on en prend une compactification lisse X , on note $Z = X \setminus Y$, et notant T le tore dont le groupe des caractères est le réseau des diviseurs sur X supportés sur U et de degré 0, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow T \rightarrow \text{Alb}^0(Y) \rightarrow \text{Alb}^0(X) \rightarrow 0$$

Démonstration. La première partie est démontrée dans [Ses59], corollaire au théorème 3, et la seconde partie est démontrée dans [Ser59a], théorème 1. □

En appliquant cela à des courbes on trouve :

Proposition 4.5.3

Soit C une courbe lisse connexe sur k .

- (1) Si C est propre, alors $\text{Alb}^0(C) \simeq \text{Pic}^0(C)^\vee \simeq \text{Jac}(C) \simeq \text{Jac}(C)^\vee$.
- (2) Si C est affine, on en choisit une compactification lisse \overline{C} , et notant $C_\infty = \overline{C} \setminus C$ l'ensemble fini des points que l'on rajoute à C pour la compactifier, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow T \rightarrow \text{Alb}^0(C) \rightarrow \text{Alb}^0(\overline{C}) \rightarrow 0$$

avec T le tore dont le groupe des caractères est $\text{Div}_{C_\infty}^0(C)$ le réseau des diviseurs de \overline{C} supportés sur C_∞ et de degré zéro.

5. 1-MOTIFS DE DELIGNE

5.1. Définition. On dispose de dualité pour les tores et les variétés abéliennes. Il serait agréable d'avoir une dualité également pour les variétés semi-abéliennes, telles que, notant $\chi(T) =: T^\vee$, $0 \rightarrow A^\vee \rightarrow S^\vee \rightarrow T^\vee \rightarrow 0$ soit exacte. Le dual de S serait donc un extension d'un réseau par une variété abélienne. Ne pouvant construire explicitement de schéma ayant cette propriété d'extension, on les forme formellement, ce qui arrive aux 1-motifs de Deligne :

Définition 5.1.1

Un 1-motif M de Deligne avec torsion est un complexe $[\mathcal{L} \rightarrow S]$ se composant d'un réseau \mathcal{L} (vu comme schéma en groupes) et une variété semi abélienne S . C'est à dire que c'est l'information d'un

tuple $(\mathcal{L}, u, S, T, A, \varphi)$ tel qu'on ait le diagramme à la ligne exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{L} & & & \\ & & & \downarrow u & & & \\ 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\varphi} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les morphismes sont ceux faisant commuter le carré évident (i.e. les morphismes de complexes). On note ${}^t\mathcal{M}_1$ la catégorie des 1-motifs de Deligne avec torsion. On peut identifier la catégorie des réseaux comme la sous catégorie pleine formée des $(\mathcal{L}, 0, 0, 0, 0, 0)$, celle des variétés abéliennes comme celle des $(0, 0, A, 0, A, Id)$ et similairement pour la catégorie des variétés semi abéliennes, et celle des tores.

5.2. Dualité. On dispose d'une dualité sur ${}^t\mathcal{M}_1$ qui coïncide avec celle des tores, réseaux et variétés abéliennes. D'ailleurs cela force la définition de la dualité pour les 1-motifs. Comme nous n'en aurons pas besoin explicitement, la dualité de Cartier (c'est son nom) ne sera définie que dans un cas particulier : Soit $S = [0 \rightarrow S]$ une variété semi abélienne vue comme un 1-motif. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow A \rightarrow 0$$

, ce qui donne, pour chaque k -variété V , une suite exacte longue donc le premier morphisme de connection est de la forme $\text{Hom}(T \times V, \mathbb{G}_m \times V) \rightarrow \text{Ext}^1(A \times V, \mathbb{G}_m \times V)$, c'est à dire un morphisme de schémas $T^\vee \rightarrow A^\vee$. On pose $S^\vee := [T^\vee \rightarrow A^\vee]$. On a bien une suite exacte duale

$$0 \longrightarrow A^\vee \longrightarrow S^\vee \longrightarrow T^\vee \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^\vee & \xrightarrow{Id} & \mathcal{L}^\vee & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A^\vee & \xrightarrow{Id} & A^\vee & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramme commutatif aux lignes exactes.

Dans l'autre sens, si $M = [\mathcal{L} \xrightarrow{u} A]$ est un 1-motif avec A une variété abélienne, on a en fait un isomorphisme $\underline{\text{Ext}}(A^\vee, \mathcal{L}^\vee) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}, A)$ (voir [BK16] Lemme 1.13.3), l'isomorphisme est le morphisme de connection dont il a été question plus haut. Dès lors, u définit une extension S de A^\vee par \mathcal{L}^\vee , c'est le dual de M .

En utilisant qu'un $M = (\mathcal{L}, u, S, T, A, \varphi)$ possède en fait un filtration $W_i(M) = \begin{cases} M & i \geq 0 \\ S & i = -1 \\ T & i = -2 \\ 0 & i < -2 \end{cases}$, (pour

plus de détail nous renvoyons le lecteur page 16 de [BS98]) on peut définir le dual d'un 1-motif quelconque. On a par exemple $gr_{-1}^{W_1} = W_{-1}/W_{-2} = A$.

Le motif dual de $M = [\mathcal{L} \rightarrow S]$ avec S l'extension de A par T sera de la forme $[T^\vee \rightarrow G]$ où G est le dual du motif $[\mathcal{L} \rightarrow A]$.

5.3. 1-Motif d'une variété. Pour être une catégorie de motifs, mieux vaut avoir un foncteur des variétés vers la catégorie en question. C'est le cas de ${}^t\mathcal{M}_1$. Il y a plusieurs manières de définir de tels foncteurs (quatre d'entre elles sont proposées dans l'article de Barbieri Viale et Srinivas [BS98], et une a été donnée par Deligne dans l'article Théorie de Hodge [Del74] 10.3.4 où il définit les 1-motifs pour la première fois). Dans cette section ne sera donnée que les foncteur utilisés dans l'article [AB15], qui sont ceux définis dans [BS98].

Pour rendre l'exposé plus simple, et plus court, nous n'allons traiter que le cas des courbes lisses. Il faut savoir que la construction qui va suivre est généralisable pour une variété quelconque, en utilisant une résolution simpliciale par des variétés lisses.

Soit C une courbe lisse, dont on prend la compactification lisse \overline{C} , et on pose $Y = \overline{C} \setminus C$. On pose

$\text{Div}_Y^0(\overline{C}) = \ker(\mathbb{Z}_{tr}[Y] \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}[\pi_0(\overline{C})])$, où l'on a noté $\mathbb{Z}_{tr}[S]$ le réseau donné par $\mathbb{Z}_{tr}[S](T) = c(T, S)$ les correspondances finies (2.1) de T vers S . C'est un réseau dont les \overline{k} -points sont les diviseurs de \overline{C} supportés sur Y et de degré 0.

Définition 5.3.1 ([BS98], définition 4.2.1)

On pose $\text{Pic}^+(C) := [\text{Div}_Y^0(\overline{C}) \rightarrow \text{Alb}^0(\overline{C})] = [\text{Div}_Y^0(\overline{C}) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C})]$.

Nous aurons besoin d'une généralisation aux paires (C, Z) avec $Z \subset C$ un nombre fini de points fermés. D'une part il est facile de définir $\text{Pic}^0(\overline{C}, Z)$: c'est le schéma en groupes représentant le foncteur associant à S/k l'ensemble des fibrés en droites \mathcal{L} sur $\overline{C} \times S$ triviaux sur $Z \times S$. C'est bien un foncteur représentable et l'on a (voir [BS98] Lemme 2.1.1 et Proposition 2.1.2¹²) une suite exacte $1 \rightarrow T(\overline{C}, Z) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C}, Z) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C}) \rightarrow 0$, avec $T(\overline{C}, Z)$ le tore $\text{coker}((\pi_{\overline{C}})_* \mathbb{G}_{m, \overline{C}} \rightarrow (\pi_Z)_* \mathbb{G}_{m, Z})$, $\pi_S : S \rightarrow \text{Spec } k$ étant la projection canonique pour un k -schéma S .

Définition 5.3.2

Pour $Z \subset C$ comme dans le paragraphe ci-dessus, on définit $\text{Pic}^+(C, Z) := [\text{Div}_Y^0(\overline{C}) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C}, Z)]$.

Nous aurons aussi besoin d'un autre foncteur, appelé Alb_- en 5.1.1 de [BS98] et A en 5.3 de [AB15].

Définition 5.3.3

On définit, pour $Z \subset C$, $A(C, Z) := [\text{Div}_Z^0(C) \rightarrow \text{Alb}^0(C)]$.

Notant que $\text{Alb}^0(C) = \text{Pic}^0(C, Y)$, et que $\pi_0(C) = \pi_0(\overline{C})$, on a aussi $A(C, Z) = [\text{Div}_Z^0(\overline{C}) \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C}, Y)]$.

On peut montrer qu'on a en fait

$$(5.3.1) \quad A(C, Z)^\vee = \text{Pic}^+(C, Z)$$

([BS98], Lemme 3.1.3). Cela permet notamment de faire des calculs cohomologiques $\text{Pic}^+(C, Z)$ étant un foncteur qui représente la cohomologie de C, Z , il y a plus de détails dans la section suivante ; puis de passer au dual pour obtenir des résultats homologiques.

5.4. **Réalisations.** On a aussi des foncteurs de réalisation des 1-motifs de Deligne.

5.4.1. *Réalisation singulière.* C'est un sous-cas de la réalisation de Hodge, un peu plus compliquée à définir puisqu'une structure de Hodge a des filtrations et donc qu'il faut prendre en compte la filtration des motifs. En fait le résultat optimal (sur \mathbb{C}) est démontré (pour des motifs sans torsion) par Deligne dans [Del74] en (10.1.3).

Théorème 5.4.1

Il existe un foncteur $T : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \text{MHS}$ de la sous catégorie des 1-motifs sans torsion sur \mathbb{C} vers la catégorie des structures de Hodge mixtes sans torsion, qui est une équivalence de catégorie d'image les structures de Hodge sans torsion de type $\{(0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)\}$.

Le groupe abélien sous-jacent à la structure de Hodge $T([\mathcal{L} \rightarrow S])$ est $T_{\mathbb{Z}}([\mathcal{L} \rightarrow S]) = \mathcal{L}(\mathbb{C}) \times_{S(\mathbb{C})} \text{Lie}(S(\mathbb{C}))$. La filtration de Hodge est en fait l'image par $T_{\mathbb{Z}}$ de la filtration du 1-motif que nous avons vue tout à l'heure.

Donnons une rapide définition d'une structure de Hodge mixte :

12. On l'applique à $C' = \overline{C} \setminus Z$.

Définition 5.4.2

Une structure de Hodge mixte est un \mathbb{Z} -module $H_{\mathbb{Z}}$ tel que $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est muni d'une filtration croissante W_{\bullet} , la filtration par le poids, et $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ est munie d'une filtration décroissante F^{\bullet} la filtration de Hodge. On demande en plus les propriétés suivantes :

- (1) Il existe une bigradation $H^{p,q}$ de $Gr_W(H_{\mathbb{C}})$, c'est à dire que pour chaque n , $Gr_W^n = W_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}/W_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$.
- (2) La filtration F induit sur $Gr_W(H_{\mathbb{C}})$ la filtration $Gr_W(F)^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',p}$.
- (3) $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$ où je note $\overline{(\cdot)}$ la conjugaison complexe.

On note MHS la catégorie des structures de Hodge mixtes, et $MHS_{\leq 1}$ celle des structures de Hodge mixte de type $\{(0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1)\}$.

Dans le théorème précédent, la mention du type est la liste des indices vérifiant $H^{p,q} \neq 0$.

On aura besoin d'un petit lemme trouvé page 13 de la version Arxiv de [BS99].

Lemme 5.4.3

Soit H une structure de Hodge sans torsion et soit L un groupe abélien, vu comme structure de Hodge muni des filtrations triviale. Alors on a un isomorphisme naturel $\text{Hom}(L, J(H)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(L, G(-1))$, où $J(H)$ est la variété abélienne (sur \mathbb{C}) donnée par $H_{\mathbb{C}}/(F^0 + H_{\mathbb{Z}})$.

Définition 5.4.4

La réalisation singulière d'un 1-motif M est le \mathbb{Z} -module sous-jacent $T_{\mathbb{Z}}(M)$ à sa réalisation de Hodge.

Une des propositions de l'article [AB15] est que la réalisation singulière de $A(C, Z)$ est l'homologie singulière de (C, Z) . Pour le montrer nous utilisons en fait le théorème de Deligne 5.4.1 et le fait que la dualité commute avec T . Comme C est une courbe lisse, son homologie est sans torsion et donc le dual de la structure de Hodge $H_1(C, Z)$ est $H^1(C, Z)$. On a alors :

Proposition 5.4.5

Soit $Z \subset C$ un nombre fini de point fermés dans une courbe affine lisse. Alors $T_{\mathbb{Z}}(A(C, Z)) = H_1(C, Z)$ ce qui est équivalent à $T_{\mathbb{Z}}(\text{Pic}^+(C, Z)) = H^1(C, Z)$ par (5.3.1).

Démonstration. On part d'un diagramme commutatifs de faisceaux sur \overline{C} , en notant $Y = \overline{C} \setminus C$, $b : Y \setminus Z \rightarrow \overline{C} \setminus Z$, $\eta : C \setminus Z \rightarrow \overline{C} \setminus Z$ et $k : \overline{C} \rightarrow Z \rightarrow \overline{C}$. Les lignes sont exactes et les colonnes aussi. Les colonnes sont données par l'exponentielle. Les " $k_!$ " ne changent rien à l'exactitude puisque c'est un foncteur exact.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & k_! b_* b^! \mathbb{Z}(1)_{Y \setminus Z} & \longrightarrow & k_! \mathbb{Z}(1)_{\overline{C} \setminus Z} & \longrightarrow & k_! \eta_* \mathbb{Z}(1)_{C \setminus Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & k_! b_* b^! \mathcal{O}_{Y \setminus Z} & \longrightarrow & k_! \mathcal{O}_{\overline{C} \setminus Z} & \longrightarrow & k_! \eta_* \mathcal{O}_{C \setminus Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & k_! b_* b^! \mathcal{O}_{Y \setminus Z}^{\times} & \longrightarrow & k_! \mathcal{O}_{\overline{C} \setminus Z}^{\times} & \longrightarrow & k_! \eta_* \mathcal{O}_{C \setminus Z}^{\times} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

En en prenant les suites exactes longues associées on trouve un diagramme aux lignes et colonnes exactes de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1)) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & \mathrm{H}_Y^1(\overline{C}, Z, \mathcal{O}_{\overline{C}}^\times) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{C}, Z) \\
& & & & & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(C, Z, \mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}_Y^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(C, Z, \mathbb{C}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}_Y^2(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1))
\end{array}$$

Ensuite, on peut montrer (voir la preuve du lemme 4.3.1 de [BS98]) que d'une part, $\ker \left(\mathrm{H}_Y^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \mathrm{H}^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \right) = \mathrm{Div}_Z^0(\overline{C})$ (ici il faut voir que comme nous faisons le changement de base sur \mathbb{C} , les faisceaux étales sont juste des \mathbb{Z} -modules, \mathbb{C} étant simplement connexe), d'autre part que le noyau de $\mathrm{cl} : \mathrm{Pic}(\overline{C}, Z) \rightarrow \mathrm{H}^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1))$ est $\mathrm{Pic}^0(\overline{C}, Z)$.

Maintenant, si $x \in \ker \left(\mathrm{H}_Y^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \mathrm{H}^2(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \right) = \mathrm{Div}_Z^0(\overline{C})$, une chasse au digramme montre qu'on peut le remonter d'une part en un élément de $\mathrm{Pic}^0(\overline{C}, Z)$, et dans un élément de $J = J(\mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1)))$ (voir le lemme 5.4.3 pour la notation), et un lemme de Biswas et Srinivas démontré en 2.2 de [BS99] montre que d'une part on peut identifier J et $\mathrm{Pic}^0(\overline{C}, Z)$, et que sous cette identification ces deux manières de remonter x sont les même, et identifie le morphisme $\mathrm{Div}_Z^0(\overline{C}) \rightarrow \mathrm{Pic}^0(\overline{C}, Z)$ à un morphisme $\mathrm{Div}_Z^0(\overline{C}) \rightarrow J(\mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{C}(1)))$ ce qui fournit, par le lemme 5.4.3 une extension

$$0 \rightarrow \mathrm{H}^1(\overline{C}, Z, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \mathrm{H}^1(C, Z, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \mathrm{Div}_Z^0(\overline{C}) \rightarrow 0$$

La preuve dudit lemme de Biswas et Srinivas est le calcul d'un morphisme de connexion d'une suite spectrale de deux manières différentes. Il se trouve que l'isomorphisme du lemme 5.4.3 lorsqu'il est appliqué à des 1-motifs de la forme $[L \rightarrow J(H)]$ fournit une extension qui est la struture de Hodge sous-jacente (c'est à dire, la réalisation de Hodge) du motif. Pour le voir, il suffit de traiter le cas des tore et des variétés abéliennes. Par exemple, le cas des variétés abélienne est par définition dans la preuve du théorème 5.4.1 par Deligne dans [Del74]. Cela termine ce schéma de preuve. \square

5.4.2. *Autres réalisations.* Bien sur, il y a des réalisation pour toutes les cohomologies en caractéristique nulle pour les 1 motifs de Deligne. Il y a notamment les réalisations ℓ -adiques et Hodge, définies en (10.1.11) de [Del74], elles sont compatibles avec la réalisation singulière, et seront utilisée à un moment pour obtenir un foncteur ${}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{R}\mathcal{M}^\sigma$ (notation de 1.5.2).

5.5. **Comparaison avec les motifs de Voevodsky.** Barbieri-Viale et Kahn ont montré dans [BK16] le théorème suivant dont nous auront besoin.

Théorème 5.5.1 ([BK16], Theorem 2.1.2)

Le foncteur¹³ $M = [\mathcal{L} \rightarrow S] \mapsto \mathrm{Tot}([\underline{\mathcal{L}} \rightarrow \underline{S}])$, qui s'étend en un foncteur qu'on note $\mathrm{Tot} : \mathbf{D}^b({}^t\mathcal{M}_1) \rightarrow \mathrm{DM}_-^{eff}$. C'est un foncteur triangulé pleinement fidèle. De plus son image essentielle est la catégorie épaisse $\mathrm{DM}_{\leq 1}^{gm}(k, \mathbb{Q})$ engendrée par les motifs de courbes.

Troisième partie 3. Comparaison des 1-motifs de Deligne et 1-motifs de Nori

Nous allons pouvoir commencer avec l'article [AB15], dont la compréhension était l'objectif de ce stage.

6. n -MOTIFS**Définition 6.0.1**

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Une sous-catégorie \mathcal{B} de \mathcal{A} est dite épaisse si pour toute suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow M' \rightarrow 0$ dans \mathcal{A} , M'' est dans \mathcal{B} si et seulement si M et M' le sont.

Étant donné une collection d'objets \mathcal{C} de \mathcal{A} , on peut bien sûr former \mathcal{B} la catégorie épaisse engendrée par \mathcal{C} .

On reprend les notations de 1.4 : La catégorie des motifs de Nori homologique est la catégorie EHM, c'est la catégorie de diagramme pour la représentation $H_\bullet : {}^D Sch_k \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$, et on note $\tilde{H}_i(X, Y) = \overline{H}_\bullet(X, Y, i)$.

Définition 6.0.2

La catégorie des n -motifs de Nori EHM_n est la sous-catégorie épaisse de EHM engendrée par les $\tilde{H}_i(X, Y)$ avec $i \leq n$.

Remarque 6.0.3. En 3.4 de [AB15], les auteurs montrent qu'en fait on peut se restreindre dans la définition de EHM_n aux $\tilde{H}_i(X, Y)$ avec X une variété de dimension plus petite que n et $i \leq n$. La preuve utilise le théorème de l'hyperplan de Lefchetz et la résolution des singularités.

Le résultat principal de l'article est le suivant :

Théorème 6.0.4 ([AB15] Théorème 6.1)

Il existe une équivalence de catégories $\nu_1 : {}^t \mathcal{M}_1 \rightarrow EHM_1$ qui est compatible avec la réalisation singulière.

L'article traite d'abord des 0-motifs, comme dans 9.4 de [HM17]. Ce n'est pas le centre de l'article et c'est facile : nous n'écrivons que le résultat :

Proposition 6.0.5 ([AB15] proposition 4.4 ou [HM17] section 9.4)

On note EHM'_0 la catégorie de diagramme du diagramme ${}^D Sch_k^0$ constitué des paires (X, Y, i) avec $i \leq 0$. Alors EHM'_0 est équivalente à la catégorie \mathcal{M}_k^0 des faisceaux étales sur k , elle même équivalente à $Rep_{\mathbb{Z}}(\text{Gal}(\bar{k}/k))$ la catégorie des \mathbb{Z} -représentations du groupe de Galois absolu de k . Sur \mathbb{Q} , [HM17] montrent que $EHM_0 \simeq EHM'_0$.

En fait la preuve ressemble beaucoup au début de la preuve de 1.5.3.

7. ÉQUIVALENCE ENTRE LES 1-MOTIFS DE DELIGNE ET UNE CATÉGORIE DE DIAGRAMMES

7.1. Un lemme catégorique. On en vient au début de la preuve de 6.0.4. Elle va reposer sur un lemme de catégories de diagrammes qui est le suivant :

Lemme 7.1.1 ([AB15], Lemme 2.10)

Soit un diagramme \mathcal{D} muni d'une première représentation $T : \mathcal{D} \rightarrow R\text{-mod}$ avec R un corps ou un anneau de Dedekind de corps des fractions K et d'une seconde représentation $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ dans une catégorie abélienne R -linéaire munie d'un foncteur exact et fidèle $G : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-mod}$ vérifiant $T = G \circ S$. Par 1.1.12, on obtient un foncteur fidèle et exact $U : \mathcal{C}(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{A}$. Supposons vérifiées les propriétés suivantes :

- (1) Pour tous $D, D' \in \mathcal{D}$, il existe un $D \amalg D'$ et des flèches $i : D \rightarrow D \amalg D'$, $i' : D' \rightarrow D \amalg D'$ telles que $T(i) + T(i') : T(D) \oplus T(D') \rightarrow T(D \amalg D')$ soit un isomorphisme.
- (2) $T(D)$ est sans torsion pour tout $D \in \mathcal{D}$.
- (3) Tout objet de \mathcal{A} est un quotient d'un objet de la forme $S(D)$ pour un $D \in \mathcal{D}$.
- (4) Pour toute application $S(D) \rightarrow A$ dans $\mathcal{A} \otimes K$, $\ker \left(T_K(D) = G(S(D)) \otimes_R K \rightarrow G(A) \otimes_R K \right)$ est un sous- $\text{End}(T \otimes_R K = T_K)$ de $T_K(D)$.

Alors U est une équivalence de catégories.

La preuve est simple mais un peu formelle, et entièrement détaillée dans l'article.

7.2. Diagramme de courbes. On définit un plus petit diagramme, ${}^D\text{Crv}$ dont les sommets sont les $(C, Z, 1)$ avec C une courbe affine lisse, et Z un ensemble fini de points fermés de C . On restreint H_\bullet à ${}^D\text{Crv}$, et on note $\text{EHM}_1''^R = \mathcal{C}({}^D\text{Crv}, H_\bullet : {}^D\text{Crv} \rightarrow R\text{-mod})$. Par 1.1.12, il y a des foncteurs exacts et fidèles $\text{EHM}_1''^R \rightarrow \text{EHM}_1'^R \rightarrow \text{EHM}_1^R$.

On a une représentation ${}^D\text{Crv} \rightarrow {}^t\mathcal{M}_1$ donnée par $(C, Z, 1) \mapsto A(C, Z)$ comme défini en 5.3.3. Cette représentation est compatible avec les représentations singulières de ${}^D\text{Crv}$ et ${}^t\mathcal{M}_1$ par 5.4.5. On obtient donc un foncteur fidèle et exact

$$(7.2.1) \quad \text{EHM}_1'' \rightarrow {}^t\mathcal{M}_1$$

notant $\text{EHM}_1'' = \text{EHM}_1''^{\mathbb{Z}}$.

La première partie de la preuve de 6.0.4 est le résultat suivant :

Théorème 7.2.1

Le foncteur obtenu dans (7.2.1) est une équivalence de catégories.

La preuve du théorème utilise le lemme 7.1.1. Il suffit en fait de vérifier le dernier point.

Proposition 7.2.2

Soit $(C, Z, 1)$ dans ${}^D\text{Crv}$ et $\alpha : A(C, Z) \rightarrow M$ un morphisme dans $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}$. Alors le noyau de $H_1(C, Z, \mathbb{Q}) = T_{\mathbb{Z}}(A(C, Z)) \rightarrow T_{\mathbb{Z}}(M)$ est un \mathcal{R}_1 -sous-module de $\overline{H}''_1(C, Z, \mathbb{Q})$, où l'on a noté H'' la restriction de H_\bullet à ${}^D\text{Crv}$, $\mathcal{R}_1 = \text{End}(H'')$ et $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}} = {}^t\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est la catégorie des 1-motifs de Deligne où l'on a inversé les isogénies.

Une fois 7.2.2 montrée, le 7.2.1 sera montré. On notera $K(C, Z, \alpha)$ le noyau dans la proposition. [AB15] commence par des réductions. Ils montrent d'abord que 7.2.2 fonctionne pour des 0 motifs :

Lemme 7.2.3

7.2.2 est vraie pour $M = [\mathcal{L} \rightarrow 0]$.

Démonstration. La proposition est compatible avec les sommes directes, donc il suffit de le montrer lorsque \mathcal{L} est simple, c'est à dire que modulo une extension galoisienne l de k , \mathcal{L} est un facteur direct de $\mathbb{Z}_{tr}(l)$. Bien sur, si le résultat est vrai pour $\mathbb{Z}_{tr}(l)$, notant $\mathbb{Z}_{tr}(l) = \mathcal{F}_l \oplus \mathcal{G}$, on aura $K(C, Z, \alpha) = K(C, Z, \alpha \oplus 0)$ donc le résultat sera vrai pour \mathcal{L}_l . 7.2.2 est invariante par changement des scalaires ([AB15] Lemme 5.11), donc il suffit de montrer le résultat pour \mathcal{L}_l et peut étendre les scalaires et supposer que C est définie sur l et que Z est rationnel sur l . À partir de là, la démonstration consiste à décomposer $T_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ en morphismes simples, puis d'exprimer ces morphismes comme image

de morphismes de source géométrique (*i.e.* venant d'un morphisme de diagramme). Tous les détails techniques mais élémentaires sont dans la preuve du lemme 5.13 [AB15]. \square

Ils montrent ensuite le lemme suivant :

Lemme 7.2.4

Pour tout morphisme $\beta : [\mathcal{L} \rightarrow 0] \rightarrow A(C, Z)$ dans $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}$ avec $(C, Z, 1) \in {}^D\text{Crv}$, l'image de la composition $T_{\mathbb{Q}}(\mathcal{L}) \rightarrow T_{\mathbb{Q}}(A(C, Z)) \simeq H_1(C, Z, \mathbb{Q})$ est un sous \mathcal{R}_1 module de $H_1(C, Z, \mathbb{Q})$.

Démonstration. On peut supposer que \mathcal{L} est simple, donc que c'est un facteur direct d'un $\mathbb{Z}_{tr}(l)$, et on peut alors même supposer que $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_{tr}(l)$. Quitte à multiplier β par un entier (l'image ne changeant pas), on peut supposer que β est un morphisme de réseaux $\mathbb{Z}_{tr}(l) \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}(Z)$, dont l'image est contenue dans $\text{Div}_Z^0(C)$ et telle que la composition avec $\text{Div}_Z^0(C) \rightarrow \text{Alb}^0(C)$ soit nulle. $j_Z\beta : \mathbb{Z}_{tr}(\text{Spec}l) \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}(Z) \rightarrow \mathbb{Z}_{tr}(C)$ est un cycle de C à coefficients dans Z . L'information donnée est que son image dans l'albanese de C , donc dans la jacobienne de \overline{C} est nulle, et comme le support de ce cycle est dans C , il se remonte en un diviseur dans $\text{Pic}(\overline{C}, \overline{C} \setminus C)$, nul. Or ce groupe est isomorphe par le théorème 1.3.18 de [Dég02] à $c(\text{Spec}l, C) / \sim$ où l'on identifie les cycles modulo homologie¹⁴. Cela nous donne alors une homotopie $\gamma \in c(A_k^1 \times_k \text{Spec}l, C)$ telle que $\gamma \circ i_0 = j_Z \circ \beta$ et $\gamma \circ i_1 = 0$.

Alors un résultat de Suslin et Voevodsky (c'est dans la preuve du théorème 4.2.12 du chapitre 2 de [VSF00]) assure l'existence d'un recouvrement *cdh* de $c : E \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ tel que $\gamma \circ c$ soit une combinaison linéaire de graphes de morphismes $E \rightarrow C$. Un recouvrement *cdh* (le terme ne sera pas défini ici) étant fini, on peut le raffiner pour obtenir un recouvrement non ramifié, $E \rightarrow C$ tel que le groupe d'automorphismes de ce recouvrement soit fini et agisse simplement transitivement. Comme on ne s'intéresse qu'à l'image de β on peut agrandir Z , et en rajoutant à Z l'image par ces morphismes de l'image réciproque de 0 et 1 par c (c'est à dire, là où γ est connue), on obtient un morphisme $H_1(E, F, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(C, Z, \mathbb{Q})$ qui identifie le but avec les G -invariant de la source, et que tout étant des morphismes induits par ceux du diagramme, ce sont des \mathcal{R}_1 -morphismes. L'image de ces invariants par la somme de morphismes qu'est $\gamma \circ c$ est aussi un \mathcal{R}_1 -module. Son image est exactement celle de $T_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_{tr}(l))\beta T_{\mathbb{Q}}(A(C, Z)) \rightarrow T_{\mathbb{Q}}(C, Z)$ ce qui termine la preuve du lemme. \square

Ensuite, la réduction principale consiste à montrer qu'il suffit de montrer 7.2.2 lorsque $M = [\mathcal{L} \rightarrow \text{Alb}^0(D)]$ pour D une courbe lisse, et α a une composante sur les variétés abélienne de la forme $\sum_i \text{Alb}^0(f_i)$ avec $f_i : C \rightarrow D$. Elle se montre en deux parties : 7.2.5 et 7.2.6.

Lemme 7.2.5

Il suffit de montrer 7.2.2 lorsque $M = [\mathcal{L} \rightarrow \text{Alb}^0(D)]$.

Démonstration. En fait il suffit de plonger \mathcal{G} (à isogénie près) dans une $\text{Alb}^0(D)$ puisqu'alors on a un monomorphisme $M \rightarrow [\mathcal{L} \rightarrow \text{Alb}^0(D)]$ et le noyau de la proposition reste le même après composition avec le monomorphisme.

Pour plonger \mathcal{G} dans un $\text{Alb}^0(D)$, on utilise en fait 5.3.1 qui réduit à montrer qu'on a un épimorphisme $A(\overline{D}, Z) = \text{Pic}^+(D, Z) \rightarrow \mathcal{G}^{\vee}$. Après avoir éliminé les cas faciles (\mathcal{G} est un tore déployé, puisque $G_m = \text{Alb}^0(\mathbb{A}_k^1 \setminus 0)$), on peut supposer que tout morphisme \mathcal{G} vers un tore est trivial¹⁵. Cela implique que notant¹⁶ $\mathcal{G}^{\vee} = [\mathcal{F} \xrightarrow{u} A]$, u est injective puisque son noyau est un réseau de tore T tel qu'il y a un épimorphisme (donc trivial) $\mathcal{G} \rightarrow T$. Alors les générateurs de \mathcal{F} vont être un nombre fini de points Z de A , et on peut alors utiliser 4.3.2 pour construire une surjection $A(\overline{D}, Z) \rightarrow \mathcal{G}^{\vee}$. \square

14. On dit que ceux correspondances finies α et β dans $c(X, Y)$ sont homotopes s'il existe une correspondance $H \in c(X \times \mathbb{A}_k^1, Y)$ vérifiant $H \circ i_0 = \alpha$ et $H \circ i_1 = \beta$, avec i_1, i_0 les inclusion de 1 et 0 $\text{Spec}k \rightarrow \mathbb{A}_k^1$.

15. En fait on suppose que \mathcal{G} n'est pas isogène à un produit dont l'un des facteurs est un tore, ce qui est équivalent après un petit jeu de réseaux (on travaille dualement).

16. Le dual d'une variété semi abélienne est de cette forme par 5.2.

Lemme 7.2.6

Si M est comme dans 7.2.5, alors on peut supposer que la composante semi-abélienne de α est de la forme $\sum_i \text{Alb}^0(f_i)$ pour f_i des morphismes $C \rightarrow D$.

Démonstration. La preuve de ce lemme (5.16 dans [AB15]) est la première de l'article qui n'utilise pas que des résultats élémentaires mais aussi des résultats plus profonds sur les motifs de Voevodsky. Après une réduction permettant une extension de scalaire (la propriété 7.2.2 est stable par extension des scalaire d'une extension galoisienne) on peut supposer que les deux courbes ont un point rationnel donc que les morphismes $D \rightarrow \pi_0(D)$ et $C \rightarrow \pi_0(C)$ ont des sections

Ils montrent d'abord que $\text{Alb}(D)$ le schéma de Serre-Albanese qui est le schéma vérifiant la même propriété universelle que la variété d'Albanese (qui en est la composante de l'identité) pour les schémas semi-abéliens est isomorphe comme faisceau avec transferts à $h_0(D)$. Il suffit de le montrer¹⁷ pour des points sur de extensions de type fini de k , donc quitte à changer le corps de base, il suffit de le montrer pour k . On utilise pour cela la section $\pi_0(D) \rightarrow D$ puisqu'elle va impliquer l'injectivité d'un morphisme $H_{\text{ét}}^2(\pi_0(\bar{D}), \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\bar{D}, \mathbb{G}_m)$ apparaissant dans la suite exacte courte des premiers termes d'une suite exacte longue de Leray $\text{Pic}(D) \rightarrow \text{Pic}(D)(\bar{k}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\pi_0(\bar{D}), \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\bar{D}, \mathbb{G}_m)$ montrant que $\text{Pic}(D) \rightarrow \text{Pic}(D)(\bar{k})$ est surjectif, impliquant le résultat car $h_0(D)(k) = \text{Pic}(\bar{D}, \bar{D} \setminus D)$ (Théorème 1.3.18 dans la thèse de Frédéric Déglise [Dég02]) et on dispose de deux suites exactes

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}_{\bar{D} \setminus D}^\times}{\mathcal{O}_{\pi_0(D)}^\times} \rightarrow \text{Pic}(\bar{D}, \bar{D} \setminus D) \rightarrow \text{Pic}(\bar{D}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}_{\bar{D} \setminus D}^\times}{\mathcal{O}_{\pi_0(D)}^\times} \rightarrow \text{Alb}^0(D)(k) \rightarrow \text{Alb}^0(\bar{D})(k)$$

Ensuite, un résultat technique sur les motifs avec transfert (11.1 de [MVW06]) donne l'existence d'une correspondance finie qui après trivialisations est somme de graphes de f_i et cela induit le résultat. \square

Ces deux réductions montrées, la proposition 7.2.2 est élémentaire, comme on sait la montrer pour des 0 motifs, et qu'on peut décomposer $[\mathcal{L} \rightarrow \text{Alb}^0(D)] = [\mathcal{F} \rightarrow 0] \oplus [\mathcal{I} \rightarrow \text{Alb}^0(D)]$, avec $\mathcal{I} \rightarrow \text{Alb}^0(D)$ injectif, on peut supposer que $M = [\mathcal{F} \rightarrow \text{Alb}^0(D)]$ est une injection. Ensuite, quitte à changer les scalaires par une extension galoisienne l/k de groupe G , on peut supposer \mathcal{F} libre, de la forme $\mathcal{F} = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{tr}(l)_{e_i}$, avec $e_i \in \mathbb{F}(l)$ est une $\mathbb{Z}[G]$ base de $\mathcal{F}(l)$. De plus on peut supposer que l'image de chaque e_i dans $\text{Alb}^0(C \times_k l)$ est un 0-cycle de $C \times_k l$. Soit T un ensemble fini de points fermés de D contenant les supports de ces cycles et chaque $f_i(Z)$. On a un morphisme de 1-motifs $\delta : M \rightarrow A(D, T)$ qui est l'identité sur $\text{Alb}^0(D)$. On a aussi par les f_i , un morphisme de 1-motifs $\gamma = \sum_i A(f_i) : A(C, Z) \rightarrow A(D, T)$. On n'a pas nécessairement $\gamma = \delta \circ \alpha$, mais la différence des deux est nulle sur la composante semi-abélienne. On décompose, dans $\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}$, $A(C, Z) = \mathcal{I} \oplus N$ avec \mathcal{I} un 0-motif et N de la forme $[\mathcal{L} \rightarrow \text{Alb}^0(C)]$ dont le morphisme est injectif. Les auteurs montrent qu'alors, notant $\mathcal{T} = \gamma(\ker \alpha|_N)$, on a $\ker \alpha = \mathcal{I} + \gamma^{-1}(\mathcal{T})$, et maintenant pour le premier terme de la somme est un \mathcal{R}_1 -sous-module par 7.2.4, et le second est l'image réciproque par $H_1(C, Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(D, T, \mathbb{Q})$ de $T_{\mathbb{Q}}(\mathcal{T})$ et on applique encore 7.2.4, cela termine la preuve.

8. DÉBUT DE COMPARAISON AVEC LES MOTIFS DE DELIGNE : LE FONCTEUR EST PLEINEMENT FIDÈLE

On a donc une équivalence de catégories ${}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \text{EHM}_1''$. En en prenant une quasi inverse, et en utilisant le foncteur venant de la propriété universel $\text{EHM}_1'' \rightarrow \text{EHM}_1$, on obtient un foncteur $\nu_1 : {}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \text{EHM}_1$. C'est le foncteur cité dans 6.0.4 dont l'article montre que c'est une équivalence de catégories.

La démonstration est en deux parties. D'abord, on montre que le foncteur est pleinement fidèle. Pour

17. Voir la section 2.1 du cours de Frédéric Déglise donné à l'école d'été au PCMI en 2021 [Dég21]

le faire, la stratégie est d'utiliser les réalisations mixtes. En fait, les différentes réalisations des 1-motifs de Deligne et des motifs de Nori fournissent des foncteurs vers \mathcal{RM}^σ compatibles :

Proposition 8.0.1

On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^D Crv & \xrightarrow{A} & {}^t \mathcal{M}_1 \\ \downarrow & & \downarrow T \\ {}^D Sch_k & \xrightarrow{R} & \mathcal{RM}^\sigma \end{array}$$

Avec T de 1.5.2. Il induit donc un carré commutatif par la propriété universelle 1.1.12 :

$$(8.0.1) \quad \begin{array}{ccc} EHM'' & \xrightarrow{\bar{A}} & {}^t \mathcal{M}_1 \\ \downarrow & & \downarrow T \\ EHM & \xrightarrow{\bar{R}} & \mathcal{RM}^\sigma \end{array}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le premier carré commute. On a vu qu'il commutait pour la réalisation de Hodge en 5.4.5. Le reste de la preuve est en fait contenu dans l'article [Del74] dans la partie 10. \square

Mais on a le :

Proposition 8.0.2 ([AB15] Proposition 6.5)

Le foncteur $T : {}^t \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{RM}^\sigma$ est pleinement fidèle.

Démonstration. La preuve se fait en plusieurs étapes selon le contexte. Si $k = \mathbb{C}$, alors la composition ${}^t \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{RM}^{id}(\mathbb{C}) \rightarrow MHS$ est pleinement fidèle par 5.4.1. Le second foncteur l'étant aussi, le premier l'est alors aussi.

Ensuite si k est algébriquement clos, le foncteur de changement de base ${}^t \mathcal{M}_1(k) \rightarrow {}^t \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est pleinement fidèle. En effet, il suffit de le montrer pour des réseaux et des variétés semi-abéliennes. Sur un corps algébriquement clos, un réseau est juste un groupe abélien et donc le changement de base n'y change rien : le foncteur de changement de base est pleinement fidèle sur les réseaux. Pour les variétés semi abéliennes on peut traiter séparément les cas des variétés abéliennes et des tores. Pour les variétés abéliennes on peut utiliser le théorème 5.1 de l'article de Conrad [Con06]. Pour les tores par l'équivalence 3.0.3 compatible au changement de base on se ramène au cas des réseaux. Dès lors, ${}^t \mathcal{M}_1(k) \rightarrow {}^t \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{MR}^{id}(\mathbb{C})$ est pleinement fidèle. Cette composition est égale à la composition ${}^t \mathcal{M}_1(k) \rightarrow \mathcal{MR}^\sigma(k) \rightarrow \mathcal{MR}^{id}(\mathbb{C})$, et le second de ces foncteurs étant fidèle, le premier aussi ce qui termine ce cas.

Dans le cas général, on note \bar{k} la clôture algébrique de k dans \mathbb{C} , et on note $G_k = Gal(\bar{k}/k)$. Si M et M' sont deux 1-motifs, on aimerait bien un résultat comme $\text{Hom}_k(M, M') = \text{Hom}_{\bar{k}}(M \otimes_k \bar{k}, M' \otimes_k \bar{k})^{G_k}$ où l'exposant ici indique qu'on prend les G_k invariants. Cela permettrait de ramener au cas précédent.

On a le diagramme commutatif suivant, notant N et N' les réalisations mixtes de M et M' :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{{}^t \mathcal{M}_1(k)}(M, M') & \longrightarrow & \text{Hom}_{{}^t \mathcal{M}_1(\bar{k})}(M \otimes_k \bar{k}, M' \otimes_k \bar{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Hom}_{\mathcal{MR}^\sigma(k)}(N, N') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{MR}^\sigma(\bar{k})}(N \otimes_k \bar{k}, N' \otimes_k \bar{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_\ell \text{Hom}_{G_k}(N_\ell \otimes_k \bar{k}, N'_\ell \otimes_k \bar{k}) & \longrightarrow & \prod_\ell \text{Hom}_{\bar{k}}(N_\ell \otimes_k \bar{k}, N'_\ell \otimes_k \bar{k}) \end{array}$$

On veut montrer que le premier morphisme de gauche est un isomorphisme. Le carré du bas est

cartésien¹⁸ puisque le coin haut gauche est exactement l'ensemble des morphismes G_k équivariants du coin haut droite, et que passer par le bas est vérifier cette équivariance. Si le carré du haut était cartésien, on aurait le résultat par celui sur \bar{k} . Par le lemme des deux pullback [nla19] il suffit donc de montrer que le grand carré est cartésien. Comme on a bien sur $\prod_{\ell} \text{Hom}_{G_k}(N_{\ell} \otimes_k \bar{k}, N'_{\ell} \otimes_k \bar{k}) = (\prod_{\ell} \text{Hom}_{\bar{k}}(N_{\ell} \otimes_k \bar{k}, N'_{\ell} \otimes_k \bar{k}))^{G_k}$ il faut, comme nous l'expliquions plus haut, montrer que $\text{Hom}_k(M, M') = \text{Hom}_{\bar{k}}(M \otimes_k \bar{k}, M' \otimes_k \bar{k})^{G_k}$. Le problème est qu'on ne sait pas le faire pour les 1-motifs de Deligne. L'idée est donc de plonger ${}^t\mathcal{M}(k)$ dans une catégorie dans laquelle on sait faire ce calcul :

On utilise le foncteur $\text{Tot} : \mathbf{D}^b({}^t\mathcal{M}_1(k)) \rightarrow \text{DM}_{-}^{\text{eff}}(k)$ (et le même pour \bar{k}) de 5.5.1 pour se ramener à montrer l'égalité sur des faisceaux. Dans $\text{DM}_{-}^{\text{eff}}(k) \subset \mathbf{D}_b(\text{Shv}_{Nis}^{tr}(k))$ le résultat vient de la suite spectrale de Hirschfeld-Serre : Pour des faisceaux, on a trivialement (le calcul se fait point par point) $\text{Hom}_{\bar{k}}(\mathcal{F} \otimes_k \bar{k}, \mathcal{F}' \otimes_k \bar{k})^{G_k} = \text{Hom}_k(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, puis le théorème de composition des foncteurs dérivés donne $\mathbf{R}\text{Hom}(C, C') = \mathbf{R}\Gamma(G_k, \mathbf{R}\text{Hom}(C \otimes_k \bar{k}, C' \otimes_k \bar{k}))$ pour toute paire C, C' de complexes de faisceaux, et en l'appliquant à $C = \text{Tot}(M)$ et $C' = \text{Tot}(M')$ on trouve le résultat. \square

Dès lors dans le carré (8.0.1), \bar{A} est une équivalence de catégories, et T et \bar{R} sont pleinement fidèles, donc $\text{EHM}_1'' \rightarrow \text{EHM}$ est pleinement fidèle :

Corollaire 8.0.3

Le foncteur $\nu : {}^t\mathcal{M}_1 \simeq \text{EHM}_1'' \rightarrow \text{EHM}$ est pleinement fidèle et le triangle

$$\begin{array}{ccc} {}^t\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\nu} & \text{EHM} \\ & \searrow T & \downarrow \bar{R} \\ & & \mathcal{MR}^{\sigma} \end{array} \text{ est}$$

commutatif à isomorphisme canonique près. De plus, EHM_1 est la sous-catégorie épaisse engendrée par l'image de ν .

Démonstration. Ne reste à montrer que le dernier résultat. Bien sur l'image essentielle de ν est contenue dans EHM_1 . Par 6.0.3 il suffit de montrer qu'elle contient les $\tilde{H}_i(C, Z, \mathbb{Z})$ pour $i \leq 1$ et C de dimension $\dim C \leq 1$. Pour se faire on part d'un $(C, Z, 1)$ général (le cas $i = 0$ est 6.0.5), et quitte à agrandir Z (on a alors une injection entre homologies), normaliser C (on a une surjection) puis lui enlever un point (on a encore une surjection), on peut supposer que $(C, Z, 1)$ est dans ${}^D\text{Crv}$ et alors le résultat est 5.4.5. \square

9. FIN DE LA COMPARAISON : LE FONCTEUR EST ESSENTIELLEMENT SURJECTIF

D'après 8.0.3 il suffit pour montrer que ν_1 est essentiellement surjectif de montrer que l'image essentielle de ν est une sous-catégorie épaisse de EHM . Les auteurs de [AB15] le font en deux étapes : ils montrent que l'image essentielle est stable par sous-quotients, puis par extension.

9.1. Stabilité par sous-quotients. Pour montrer cette stabilité, on utilise le foncteur pleinement fidèle $\bar{R} : \text{EHM} \rightarrow \mathcal{MR}^{\sigma}$: si l'image de $T : {}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{MR}^{\sigma}$ est stable par sous-quotients, alors en passant par \bar{R} , l'image de ν le sera aussi. En effet supposant le résultat démontré pour T , si M est un 1-motif de Deligne et Q est un sous-quotient de $\nu(M)$, alors $\bar{R}(Q)$ est un sous-quotient de $\bar{R}(\nu(M)) = T(M)$ dont est de la forme $T(N)$ pour N un autre 1-motif de Deligne. On a donc $\bar{R}(Q) = \bar{R}(\nu(N))$. Par pleine fidélité cette égalité vient d'un morphisme $Q \rightarrow \nu(N)$. La réalisation singulière de ce morphisme est un isomorphisme et le foncteur de réalisation singulière $\text{EHM} \rightarrow \mathbb{Z} - \text{mod}$ étant fidèle et exact, il est conservatif sur les catégories dérivées, cela implique $Q \rightarrow \nu(N)$ est un isomorphisme !

Reste donc à montrer :

Proposition 9.1.1

Le foncteur $T : {}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{MR}^{\sigma}$ a une image essentielle stable par sous-quotients.

18. En anglais : un *pullback*.

Démonstration. Il suffit de prouver la stabilité par sous-objets car on dispose d'une dualité compatible avec les réalisations. La preuve se déroule un peu comme celle de 8.0.2 : on distingue les cas selon la nature du corps de base k . Si $k = \mathbb{C}$ encore une fois cela découle de 5.4.1. Si k est algébriquement clos, on le plonge dans \mathbb{C} et alors le fait que tout sous-réseau (resp sous variété semi-abélienne) du changement de base par \mathbb{C} est en fait défini sur k comme dans la preuve de 8.0.2, cela vient d'une descente fppf. Cela nous ramène au premier cas.

Le cas général utilise la réalisation de De Rham¹⁹ car elle est stable par extension et restriction des scalaires (voir par exemple 3.1.4 de [HM17]). Par le cas algébriquement clos si $N \subset T(M)$ est un sous-objet, il y a un sous-objet M' de $M \otimes_k \bar{k}$ qui vérifie $T(M \otimes_k \bar{k}) = N \otimes_k \bar{k}$. D'abord, M' est défini sur une extension finie l : il y a M'' sur l tel que $M'' \otimes_l \bar{k} = M'$. On peut alors restreindre les scalaires de M'' à k , pour obtenir un 1-motif $M^{(3)}$, qui est un sous-objet de $M \otimes \mathbb{Z}_{tr}(l)$. On a un morphisme naturel $M \rightarrow M \otimes \mathbb{Z}_{tr}(l)$ et on définit N' comme l'intersection de l'image de M et $M^{(3)}$ dans $M \otimes \mathbb{Z}_{tr}(l)$. Par construction, $N' \otimes_k l \subset M'$ donc $T(N') \subset N$. Par stabilité par extension et quotients de T_{dR} , et son exactitude, on trouve $T_{dR}(N') \subset N_{dR}$ donc $T(N') \subset N$ est d'indice fini (toutes les réalisations ℓ -adiques vont coïncider, ainsi que la réalisation singulière sur \mathbb{Q} , ne peut rester que de la torsion. Quitte à remplacer M par le quotient M/N' , on peut donc supposer que N est de torsion dans ${}^t\mathcal{M}_1(k)$, en particulier par 6.0.5 il est dans l'image de $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{RM}^\sigma$: il y a un réseau sans partie libre (de torsion donc) qui vérifie $N = T([\mathcal{L} \rightarrow 0])$. Comme T est pleinement fidèle et exact, il y a un monomorphisme $[\mathcal{L} \rightarrow 0] \rightarrow M$ qui s'envoie sur $N \subset T(M)$. Cela termine la preuve. Nous n'avons pas donné tous les détails, le lecteur consciencieux pourra aller voir la preuve de la proposition 7.1 de [AB15]. \square

Cela termine cette section.

9.2. Stabilité par extensions.

9.2.1. *Reduction aux motifs à coefficients dans \mathbb{Q} .* Joseph Ayoub et Luca Barbieri-Viale commencent par une réduction :

Lemme 9.2.1

Pour montrer que l'image essentielle de $\nu : {}^t\mathcal{M}_1 \rightarrow \text{EHM}$ est stable par extension il suffit de montrer que celle de $\nu : \mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{EHM}^{\mathbb{Q}}$ l'est.

Démonstration. On suppose donc qu'on a vérifié que $\nu : \mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{EHM}^{\mathbb{Q}}$ a l'image stable par extensions, et on veut le montrer sur \mathbb{Z} . Pour ce faire, soit $0 \rightarrow \nu(M') \xrightarrow{r} N \xrightarrow{s} \nu(M'') \rightarrow 0$ une extension de motifs de Nori. Les auteurs traitent plusieurs cas :

- Si M' est sans-torsion et M'' est de torsion alors sur \mathbb{Q} , r est un isomorphisme dont on peut prendre une section : il y a un morphisme $f : N \rightarrow \nu(M')$ tel que fr est la multiplication par un entier. Comme M' est sans torsion, le morphisme $N \rightarrow \nu(M') \oplus \nu(M'')$ est injectif, et l'image essentielle étant stable par somme directe et par sous-objets, N est bien dans l'image essentielle de ν .
- Si les deux sont sans torsion, N l'est aussi, et il existe alors un 1-motif M tel que $M \simeq \nu(N)$ sur \mathbb{Q} . On prend un morphisme $N \rightarrow \nu(M)$ sur \mathbb{Z} induisant cet isomorphisme sur \mathbb{Q} , M est sans torsion, ce morphisme est injectif et la stabilité par sous-quotient permet encore de conclure.
- Si M' est sans torsion et M est quelconque comme la suite exacte de l'extension reste exacte après tensorisation par $\mathbb{Z}_{tr}(l)$ pour l/k finie et que $N \rightarrow N \otimes \nu(\mathbb{Z}_{tr}(l))$ est injective, l'image essentielle étant stable par sous-objets il suffit de montrer que $N \otimes \nu(\mathbb{Z}_{tr}(l))$ est dans l'image essentielle pour l une extension bien choisie. Pour l/k assez large la partie torsion du réseau de M'' est un facteur direct. Alors $M'' = F \oplus T$ avec F un 1-motif sans torsion et T est un 1-motif de torsion. Alors N s'injecte dans une somme directe constituée d'une extension de

19. Comme quoi entre cette preuve et la preuve de 8.0.2 nous aurons utilisé toute l'information donnée par \mathcal{RM}^σ .

$\nu(F)$ par $\nu(M')$ et une extension de $\nu(T)$ par $\nu(M')$, donc les deux premiers cas, ainsi que le fait que l'image du foncteur soit stable par sous-objets permettent de conclure.

- Dans le cas général, en prenant $M'_t \subset M'$ la partie torsion de M' , par le cas précédent, M'/M'_t est dans l'image essentielle de ν . Dès lors on peut supposer que M' est de torsion. Mais alors $N \rightarrow \nu(M'')$ est un isomorphisme dans $\text{EHM}^{\mathbb{Q}}$, il existe donc un motif sans torsion M''' et un morphisme $t : \nu(M''') \rightarrow N$ tel que $s \circ t$ soit une isogénie $M''' \rightarrow M''$. En utilisant le premier cas il suffit de montrer que $N/\nu(M''')$ est dans l'image essentielle, donc on est réduit au cas où M'' et M' sont de torsion. Alors N est aussi de torsion. Alors on utilise 1.5.3 disant que les motifs de Nori de torsion sont des 0-motifs. Cela termine la preuve. \square

9.2.2. *La conjecture de Deligne sur les extensions de 1-motifs.* On reprend les notations de 2.2 sauf que nous inverserons exposant et indices, pour avoir des notations "homologiques" et suivre les notations de l'article : on note donc $\text{DM}_{\text{eff}}^{gm}$ pour $\text{DM}_{gm}^{\text{eff}}$. On notera, pour $Y \subset X$ un fermé dans une variété sur k , $M(X, Y) = \mathbb{Q}_{tr}(X)/\mathbb{Q}_{tr}(Y) \in \text{DM}_{\text{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q})$ (le fait que ce motif soit dans les motifs *geometriques* alors que ceux ci sont ceux générés par les variétés lisses vient du fait qu'on travaille en caractéristique nulle donc qu'on dispose de résolution des singularités). Le théorème 1.5.1 donne un foncteur $\Gamma : \text{DM}_{\text{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\text{EHM}^{\mathbb{Q}}(k))$ qui envoie $M(X, Y, \mathbb{Q})$ sur un complexe $\Gamma(X, Y, \mathbb{Q})$ vérifiant naturellement $H_i(\Gamma(X, Y, \mathbb{Q})) = \tilde{H}^i(X, Y, \mathbb{Q})$. On commence par une proposition pour mettre les choses en places, et voir quels objets sont en jeu.

Proposition 9.2.2

On a un carré commutatif de foncteurs qui commute à isomorphisme naturel près :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}(k) & \xrightarrow{\nu} & \text{EHM}^{\mathbb{Q}}(k) \\ \downarrow \text{Tot} & & \downarrow \\ \text{DM}_{\text{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbf{D}^b(\text{EHM}^{\mathbb{Q}}(k)) \end{array}$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\Gamma \circ \text{Tot}$ a une image dans le coeur de la t -structure canonique de $\mathbf{D}^b(\text{EHM}^{\mathbb{Q}}(k))$. Comme la réalisation de Betti est un foncteur conservatif sur les catégories dérivées, il suffit de le montrer après réalisation. Il suffit de traiter séparément les cas des réseaux, tores et variétés abéliennes. Comme cette réalisation se calcule en changeant de base de k à \mathbb{C} , on peut supposer que $k = \mathbb{C}$. Les deux premiers cas sont évidents (un réseau n'a que un H^0 non nul et un tore n'a que le H^1 , mais Tot le décale en -1 ce qui le met dans le coeur). Reste celui d'une variété abélienne A . D'abord, par 4.3.2 on a une courbe lisse projective C contenue dans A , contenant 0 telle que $J(C) \rightarrow A$ est surjective. Comme on travaille à coefficients dans \mathbb{Q} , les isogénies sont inversées et donc par 4.2.2, A est en fait un facteur direct de $J(C)$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $J(C)$. On peut supposer C connexe puisque la réalisation singulière est additive. Notons aussi que C étant contenue dans A , elle est aussi contenue dans $J(C)$. On prend $c \in C$ différent de 0 (comme on travaille sur \mathbb{C} tous les points sont rationnels). Par 2.3.1, $M(C \setminus c) = \text{Alb}^0(C \setminus c) \oplus \mathbb{Q}_{tr}(pt)$, la section de la suite exacte étant fournie par le point rationel $0 \in C$. On a alors $\text{Alb}^0(C \setminus c) \simeq M(C \setminus c)/\mathbb{Q}_{tr}(\{0\})$. Or la suite exacte 4.5.2 donne, le réseau $\text{Div}_{\{0\}}^0(C)$ étant nul donc dual trivial, que $\text{Alb}^0(C \setminus \{c\}) = J(C)$. Dès lors, $J(C) \simeq M(C \setminus \{c\}, \{0\})$. C'est pourquoi $\text{Tot}([0 \rightarrow J(C)]) = J(C)[-1] = M(C \setminus \{0\}, \{0\})[-1]$ est dans le coeur de $\mathbf{D}^b(\text{EHM}^{\mathbb{Q}})$: ce dernier motif n'a de la cohomologie singulière qu'en 0 (le terme non décalé n'a d'homologie qu'en 1, à savoir $H_1(C)$, par la suite exacte longue de cohomologie, le H_1 d'un point est nul et $H_0(C \setminus \{c\}) \rightarrow H_0(C)$ est un isomorphisme).

Dès lors pour montrer que le carré de la proposition commute, il suffit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}(k) & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{EHM}^{\mathbb{Q}}(k) \\
\downarrow \mathrm{Tot} & & \uparrow \mathrm{H}_0 \\
\mathrm{DM}_{\mathrm{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbf{D}^b(\mathrm{EHM}^{\mathbb{Q}}(k))
\end{array}$$

commute. Mais alors par l'universalité (1.1.12) et par la partie sur le diagramme des courbes notemment 7.2.1, il suffit alors de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc}
{}^D\mathrm{Crv} & \xrightarrow{\overline{\mathrm{H}}^\bullet} & \mathrm{EHM}^{\mathbb{Q}}(k) \\
\downarrow \mathrm{Tot} \circ A & & \uparrow \mathrm{H}_0 \\
\mathrm{DM}_{\mathrm{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbf{D}^b(\mathrm{EHM}^{\mathbb{Q}}(k))
\end{array}$$

On se donne donc $(C, Z, 1) \in {}^D\mathrm{Crv}$. D'après 2.3.1, on a un diagramme commutatif aux lignes et colonnes qui sont des triangles distingués dans $\mathbf{D}^b(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(k))$, notant $\mathcal{L} = \mathrm{coker}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(Z) \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\pi_0(C)))$. On rappelle qu'on note $\mathrm{Div}_Z^0(C) \otimes \mathbb{Q}$ le noyau de ce morphisme.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Div}_Z^0(C) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(Z) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(\mathrm{Div}_Z^0(C) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(Z)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Alb}^0(C) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(C) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\pi_0(C)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Tot}(A(C, Z))[+1] & \longrightarrow & M(C, Z) & \longrightarrow & \mathcal{L}
\end{array}$$

Pour l'obtenir, la ligne du milieu est 2.3.1, celle du haut, et les trois colonnes viennent de suites exactes. En fait on obtient celle du bas par un diagramme des 9 (voir par exemple 1.1.11 de [BBD82]). Comme $H^1(\mathcal{L}) = 0$, la dernière ligne du diagramme précédent fournit un isomorphisme $H^0(M(C, Z)) \rightarrow H^0(\mathrm{Tot}(A(C, Z)))$, donc on peut remplacer $\mathrm{Tot} \circ A$ par M , et alors la commutation est par définition. \square

Le reste de la preuve repose sur l'existence d'adjoints :

On a un foncteur $\mathrm{MHS}_{\leq 1}^{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{MHS}^{\mathbb{Q}}$ (notations de 5.4.2) induisant un plongement pleinement fidèle $\mathbf{D}^b(\mathrm{MHS}_{\leq 1}^{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{MHS}^{\mathbb{Q}})$ et un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{DM}_{\leq 1}^{gm}(k, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{R_{\leq 1}^{Hdg}} & \mathbf{D}^b(\mathrm{MHS}_{\leq 1}^{\mathbb{Q}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{DM}_{\mathrm{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{R^{Hdg}} & \mathbf{D}^b(\mathrm{MHS}^{\mathbb{Q}})
\end{array}$$

R^{Hdg} est obtenu comme composition de $\mathrm{DM}_{\mathrm{eff}}^{gm}(k, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{D}^b(\mathrm{EHM}^{\mathbb{Q}}(k)) \xrightarrow{R^{Hdg}} \mathbf{D}^b(\mathrm{MHS}_{\mathrm{eff}}^{\mathbb{Q}})$, le deuxième foncteur étant obtenu par la partie Hodge de 1.5.2. Il se trouve²⁰ que dans ce carré, les deux foncteurs verticaux admettent des adjoints à gauche. C'est démontré en 6.2.2 et 17.1.1 de l'article de Barbieri-Viale et Kahn [BK16]. On les note $L\mathrm{Alb}$ et $(\cdot)_{\leq 1}$. Le diagramme carré commutant, la double adjonction donne un morphisme

$$(9.2.1) \quad (R^{Hdg}(M))_{\leq 1} \rightarrow R_{\leq 1}^{Hdg}(L\mathrm{Alb}(M)) = R^{Hdg}(L\mathrm{Alb}(M))$$

, qui est inversible, c'est démontré en 17.3.1 de [BK16]. Les auteurs de [AB15] en redonnent une preuve dans l'article qui consiste à montrer que l'homologie de Betti de l'albanese de X est la même que celle de X pour X vérifiant quelques propriétés sur son groupe de Picard. Nous renvoyons donc à la preuve dans l'article de cette proposition, qui est la 8.8 .

On arrive au dernier résultat précédant la fin de la preuve.

20. Et c'est un résultat hautement non trivial, d'ailleurs faux pour des n -motifs si $n > 1$.

Théorème 9.2.3

Soit $M \in \text{EHM}^{\mathbb{Q}}$ un motif dont la réalisation de Hodge est dans $MHS_{\leq 1}^{\mathbb{Q}}$. Alors M est dans l'image essentielle de $\nu : \mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{EHM}^{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. On peut écrire M comme un sous-quotient de $\tilde{H}_i(X, Y, \mathbb{Q})$ puisqu'ils génèrent $\text{EHM}^{\mathbb{Q}}$. On considère $A = H_i(\text{LAlb}(M(X, Y, \mathbb{Q})))$, avec H_i l'homologie par rapport à la t -structure de $\text{DM}_{\leq 1}^{gm}(k, \mathbb{Q})$ déduite de la t -structure canonique de $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}})$ par 5.5.1.

On pose $N = \Gamma(A)$, ce qui donne par construction une application $\tilde{H}_i(X, Y, \mathbb{Q}) \rightarrow N$ puisqu'on a un morphisme $\Gamma(M(X, Y, \mathbb{Q})) \rightarrow \Gamma(\text{LAlb}(M(X, Y, \mathbb{Q})))$. En particulier, par 9.2.1, ce morphisme induit le morphisme de structures de hodge mixtes $H_i^{Hdg}(X, Y, \mathbb{Q}) \rightarrow (H_i^{Hdg}(X, Y, \mathbb{Q}))_{\leq 1}$, où ici $H_i^{Hdg}(X, Y, \mathbb{Q})$ est la structure de Hodge mixte de la réalisation singulière à coefficients dans \mathbb{Q} de $Y \subset X$.

Maintenant si $M = M'/M''$ avec M', M'' des sous-motifs de $\tilde{H}_i(X, Y, \mathbb{Q})$, prenant N', N'' leurs images dans N , on a $M = N'/N''$ puisque c'est vrai sur les réalisations de Hodge. Donc M est un sous-quotient de $\Gamma(A)$. Si $A' \in \mathcal{M}_1^{\mathbb{Q}}$ est un 1-motif tel que $\text{Tot}(A') = A$, on a $\nu(A') = \Gamma(A)$ par 9.2.2. C'est terminé. \square

La réalisation singulière étant un oubli de la réalisation de Hodge, cela termine la preuve de la stabilité par extension, donc la preuve du théorème.

Les auteurs terminent l'article en donnant un dernier théorème, à savoir l'existence d'un adjoint à gauche de l'inclusion $\text{EHM}_1 \rightarrow \text{EHM}$.

RÉFÉRENCES

- [AB15] J. AYOUN et L. BARBIERI-VIALE. “Nori 1-motives”. In : *Mathematische Annalen* 361.1 (fév. 2015), p. 367-402. ISSN : 0025-5831, 1432-1807. DOI : [10.1007/s00208-014-1069-8](https://doi.org/10.1007/s00208-014-1069-8). arXiv : [1206.5923](https://arxiv.org/abs/1206.5923). URL : <http://arxiv.org/abs/1206.5923> (visité le 08/05/2021).
- [BBD82] Alexander A. BEILINSON, Joseph BERNSTEIN et Pierre DELIGNE. “Faisceaux pervers”. In : *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*. T. 100. Astérisque. Paris : Soc. Math. France, 1982, p. 5-171.
- [BK16] Luca BARBIERI-VIALE et Bruno KAHN. “On the derived category of 1-motives”. In : (13 sept. 2016). arXiv : [1009.1900](https://arxiv.org/abs/1009.1900). URL : <http://arxiv.org/abs/1009.1900> (visité le 10/05/2021).
- [BS98] Luca BARBIERI-VIALE et Vasudevan SRINIVAS. “Albanese and Picard 1-motives”. In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* (1998).
- [BS99] J. BISWAS et V. SRINIVAS. “A Lefschetz (1,1) theorem for normal projective complex varieties”. In : *Duke Mathematical Journal* 101 (1999), p. 427-458.
- [Con06] B. CONRAD. “Chow’s K/k -image and K/k -trace, and the Lang-Neron theorem”. In : 2006.
- [Dég02] Frédéric DÉGLISE. *Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques, Thèse de Doctorat*. 2002. URL : http://deglise.perso.math.cnrs.fr/docs/avant2003/these_deglise.pdf.
- [Dég21] Frédéric DÉGLISE. *An introductory course on Voevodsky’s motivic complexes, PCMI 2021 Graduate Summer School, IAS*. 2021. URL : <http://deglise.perso.math.cnrs.fr/docs/2021/PCMI1.pdf>.
- [Del74] Pierre DELIGNE. “Théorie de Hodge, III”. In : *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* (1974).
- [DM12] P DELIGNE et J S MILNE. “Tannakian Categories”. In : (2012), p. 72.
- [Fak00] N. FAKHRUDIN. *Notes of Nori’s lectures on mixed motives. TIFR, Mumbai*. 2000.
- [GK20] Mainak GHOSH et Amalendu KRISHNA. “Bertini theorems revisited”. In : *arXiv :1912.09076 [math]* (31 août 2020). URL : [http://arxiv.org/abs/1912.09076](https://arxiv.org/abs/1912.09076) (visité le 17/06/2021).
- [Har16] Daniel HARRER. “Comparison of the Categories of Motives defined by Voevodsky and Nori”. In : (2016), p. 236.

- [Hat00] Allen HATCHER. *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. URL : <https://cds.cern.ch/record/478079>.
- [HM17] Annette HUBER et Stefan MÜLLER-STACH. *Periods and Nori Motives*. Cham : Springer International Publishing, 2017. ISBN : 978-3-319-50925-9 978-3-319-50926-6. DOI : [10.1007/978-3-319-50926-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-50926-6). URL : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-50926-6> (visité le 08/05/2021).
- [Lev+09] Marc LEVINE et al. “Autour des motifs : école d’été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres : Asian-French summer school on algebraic geometry and number theory”. In : 2009.
- [Mil20] J. S. MILNE. *Abelian Varieties*. 2020. URL : <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/av.html>.
- [Mil86] J. S. MILNE. “Abelian Varieties”. In : *Arithmetic Geometry*. Sous la dir. de Gary CORNELL et Joseph H. SILVERMAN. New York, NY : Springer New York, 1986, p. 103-150. DOI : [10.1007/978-1-4613-8655-1_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8655-1_5). URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8655-1_5.
- [MVW06] Carlo MAZZA, Vladimir VOEVODSKY et Charles A WEIBEL. *Lecture notes on motivic cohomology*. T. 2. American Mathematical Soc., 2006.
- [nla19] NLAB. *Pasting Pullback Lemma*. 2019. URL : <https://ncatlab.org/nlab/show/pasting+law+for+pullbacks>.
- [Ser59a] Jean-Pierre SERRE. “Morphismes universels et différentielles de troisième espèce, exposé 11”. In : *Séminaire Chevalley* (1959).
- [Ser59b] Jean-Pierre SERRE. “Morphismes universels et variété d’Albanese, exposé 10”. In : *Séminaire Chevalley* (1959).
- [Ses59] Conjeerveram Srirangachari SESHADRI. “La variété de Picard d’une variété complète , exposé 8”. In : *Séminaire Chevalley* (1959).
- [Stacks] THE STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project*. 2018. URL : <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [Voe11] Vladimir VOEVODSKY. “5. Triangulated Categories of Motives Over a Field”. In : Vladimir VOEVODSKY, Andrei SUSLIN et Eric M. FRIEDLANDER. *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. (AM-143)*. Princeton University Press, 31 déc. 2011, p. 188-238. ISBN : 978-1-4008-3712-0. DOI : [10.1515/9781400837120.188](https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781400837120.188/html). URL : <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781400837120.188/html> (visité le 01/07/2021).
- [VSF00] Vladimir VOEVODSKY, Andrei SUSLIN et Eric M. FRIEDLANDER. *Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. (AM-143)*. Princeton University Press, 2000. ISBN : 9780691048154. URL : <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7tcnh>.