Salut Swann,

C'est une noble entreprise que d'essayer de se lancer dans les ∞-catégories ! Le livre de Cisinski est effectivement très bien. Au cas où, il y a aussi quelques autres ressources possibles, en vrac :

- Le livre tout récent de Markus Land (https ://link-springer-com.acces.bibliotheque-diderot.fr/book/10.1007/978-3-030-61524-6), plus court, je ne l'ai pas lu mais il parait qu'il est très bien.
- Kerodon (l'espèce de Stacks des infini-catégories), ça ne sert à rien de tenter de le lire linéairement (et ça fait bien 1500 pages), mais c'est pas mal en cas de besoin de chercher/citer des résultats précis, avec des preuves très clean.
- Côté ∞-catégories stables, la meilleure référence est effectivement le chapitre 1 de HA, mais il n'y a pas besoin de lire tout le chapitre en détail pour avoir une bonne idée de ce que sont les ∞-catégories stables. Il y a un chapitre dans le Riehl-Verity qui parle d'∞-catégories stable mais je ne suis pas encore assez rentré de le formalisme de Riehl-Verity pour dire ce qu'il vaut malheureusement.
- Il y a une série de vidéos « Higher Algebra » par Krause et Nikolaus sur Youtube, elles sont très bien pour avoir un « feel » de comment les choses se passent, mais n'ont pas certain des détails croustillant.

Déjà deux petites remarques sur le livre de Cisinski, bonnes à savoir à mon avis :

- C'est un bouquin écrit « à la française » : les théorèmes ne sont pas particulièrement motivés et c'est au lecteur de comprendre à quoi ils peuvent bien servir, de les essayer sur des exemples, etc... J'ai mis un certain temps avant de vraiment apprécier certains des théorèmes. Certains théorèmes ne « prennent leur sens » qu'une centaine de page plus loin. C'est un bouquin qui se lit mieux en sachant où les choses vont. Par contre, vu que c'est à la française, c'est aussi très rigoureux, et ça c'est bien (les trucs les « plus grave » que j'ai pu voir sont essentiellement des erreurs d'indices dans des trucs assez combinatoire, il y a aussi un erratum sur le site de Cisinski). Hésitez pas à me demander si vous avez des doutes sur à quoi peuvent bien servir certain trucs.
- Il manque un truc dans le bouquin : une discussion du théorème de redressement des fibrations co-cartésiennes. C'est un théorème très important, très mal expliqué dans HTT, mieux expliqué dans Kerodon (mais la preuve n'y est pas encore 100 pour cent complète).

Maintenant sur le contenu même du livre :

- Le chapitre 1 peut se traiter assez vite : 1.1 est une collection de rappels sur les catégories, 1.2 est une définition rapide des ensembles simpliciaux. Dans 1.3 il y a deux lemmes assez technique mais qu'à mon avis il faut énoncer (car c'est vraiment le fond de presque toutes les preuves sur les ensembles simpliciaux) : le lemme 1.3.6 et le théorème 1.3.8. À mon avis, ça suffit largement de les énoncer dans le cas particulier des ensembles simpliciaux sans s'encombrer de son formalisme des « catégories d'Eilenberg-Zilber » parce que de fait, il s'en sert surtout pour les ensembles simpliciaux, bi-simpliciaux, et les catégories des éléments d'un préfaisceau sur un de ces deux, mais un bon agiotage de main suffit pour les deux derniers je pense (il ne s'en sert qu'à un endroit je pense). 1.4, 1.5 et 1.6 sont importants, mais à mon avis inutile d'y prouver tout ce qui est énoncé (c'est surtout les définitions qui sont importante), par exemple énoncer 1.4.11 suffit.
- Le chapitre 2 peut être assez important car pas mal de machinerie sur les ∞-catégories se prouvent à l'aide de la théorie des catégories de modèles. 2.1 et

2.2 sont important, dans 2.3, je pense que le plus important est la notion de foncteur dérivé entre catégories de modèles et de colimite homotopique (2.3.20), les lemmes techniques sur le calcul dans le cas des carrés (2.3.28 et 2.3.29) ou des colimites filtrantes ou des co-produits (2.3.16, 2.3.19) peuvent être énoncés mais c'est probablement une perte de temps de les prouver. Puisque le bouquin est avare d'exemple, c'est à mon avis important de donner des exemples de la différence entre colimite et colimite homotopique, il y a un exemple sympa en page 6.3 du libre de Riehl « Categorical homotopy theory » (il y a aussi une approche alternative dans le chap 2 de ce bouquin pour les foncteurs dérivés qui est très sympa). La section 2.4 est un gros morceau et est très intéressante mais, au fond, peut être prise comme une boite noire : en gros, c'est la machinerie pour produire des structures de modèles sur des catégories, le théorème 2.4.19 (en passant rapidement sur les définitions avant ça) peut être pris comme une boite noire et basta.

- Le chapitre 3 est vraiment important mais est assez technique et beaucoup de preuve se ressemblent (3.1.2, 3.1.3, 3.2.3), ça vaut peut-être le coup d'en faire une et d'expliquer que les autres sont du même genre. Une bonne partie de 3.1 peut se zapper en mettant ensemble 3.1.8 et 3.1.29, 3.1.30, et en expliquant « avec les mains » la construction du foncteur de remplacement fibrant Ex^∞ et pourquoi il « inverse tout le monde » (et en mentionnant qu'il commute aux colim filtrantes). Le gros de 3.2 est la preuve de 3.2.3 qui peut être sautée ou faite un peu rapidement, et 3.3 introduit le truc très important des infinis-catégories. La section 3.4 introduit des définitions importantes (fibrations à droite et à gauche et jointur mais une bonne partie des preuves sont assez combinatoire et peuvent être sautée ou faites juste en petite dimension pour voir comment ça marche. Les sections 3.5 et 3.6 sont vraiment importante conceptuellement et à mon avis il faut y passer du temps : c'est important de voir avec des exemples ce que des propositions comme 3.5.11, 3.5.13 ou 3.6.4 veulent vraiment dire. En gros, ces propositions montrent par exemple comment on peut « remplacer de manière cohérente » un foncteur par un autre dont les valeurs sont des objets isomorphes à ceux du premier foncteur, en quoi le remplacement est unique à choix contractile près, etc... Ce sont des choses à priori non triviales puisqu'un foncteur est un morphisme d'ensemble simpliciaux, donc un truc avec une énorme quantité de structure et d'identités à vérifier. La section 3.7 explique comment on peut parler de « La » composition dans une ∞-catégorie, comment la relier à la composition dans la catégorie homotopes, etc... C'est conceptuellement important mais ça peut s'expliquer un peu vite. La section 3.8 introduit un outil technique mais peut être sautée je pense. Le théorème 3.9.7 et les définitions pour y arriver sont très importantes, mais je ne sais pas si la preuve complète est pertinente.
- Les chapitres 4 et 5 sont des gros morceaux, et ils ne sont pas facile. La partie 4.3 est importante, car elle explique en quoi les objets finaux sont « uniques » (4.3.13). Il faut comprendre que dans ces partie que Cisinski veut prouver un théorème de « redressement » : les fibrations à gauche sur un ensemble simplicial K ont une structure de catégorie de modèle dont l'∞-catégorie sous-jacente est l'infini-catégorie des foncteurs de K dans l'∞-catégorie des ∞-groupoïdes. Ca peut être une bonne idée de rappeler la correspondance « classique ». Toutes les constructions sur les fibrations à gauche ou à droite sont motivées a posteriori par cette équivalence (qu'il ne prouve dans sa forme générale qu'au chapitre 7...) par exemple les foncteurs de changement de base deviennent les foncteurs d'extension de Kan, etc... Dans le chapitre 4, une bonne partie du formalisme de 4.4 peut se sauter, mais le cor 4.4.31 est important conceptuellement et sa preuve peut se sauter. En gros, ce

corollaire explique comment « reconnaitre » un foncteur final par un critère sur la « forme » des catégories, c'est important car les phénomène de finalité sont souvent des points clés pour calculer certaines limites ou colimite dans des infini-catégories (mentionner 6.4.5 par exemple).

- Dans le chapitre 5, il y a une première version de la correspondance entre fibrations à gauche et foncteurs dans les ∞-groupoïdes : c'est de 5.2 à 5.4, c'est magnifique mais la peut-être sautée (sinon, c'est probablement un exposé complet, en sautant des détails), la définition importante est celle de l'infini-catégorie S, le cor. 5.3.21, sa version cohérente 5.4.7, et l'équivalence complète 7.8.9. Si vous voulez prendre ça comme une boite noire, expliquez peut-être comment définir la proposition « Une fibration F : A -> K est un redressement d'un foncteur K -> S » en terme de l'existence d'un certain pullback, admettez que c'est vraiment une « proposition » (i.e que l'espace de ces pullbacks est vide est contractile, Kerodon 02SC), et mentionnez que ça marche aussi pour des fibrations plus générales (fibrations co-cartésienne à la place de fibration à gauche, et on remplace S par Cat_∞), et que ça suffit essentiellement à faire de tout ça une équivalence d'∞-catégories. Le deuxième gros morceau du chapitre 5 (mais qui est extrêmement important car toute l'approche du chapitre 6 repose dessus) est Yoneda : c'est probablement bien d'expliquer comment ce théorème sur les fibrations permet de définir (à choix contractile près) un foncteur « Hom » dans une ∞-catégorie, et comment il est relié aux Hom déjà définis plus tôt dans le bouquin (c'est 5.6.14 sans le dire), après ça, Yoneda peut être pris comme une boite noire (c'est autrement plus dur à prouver que 1-catégoriquement, mais la preuve de Cisinski est très belle).
- Le chapitre 6 prend Yoneda comme base et développe le gros de la théorie formelle des infini-catégories à partir de ça : adjoints, limites, colimites, propriété universelle des préfaisceaux et extensions de Kan. C'est important, mais ça peut se passer un peu vite sur certains détails.
- Le chapitre 7 peut être sauté en grande partie, surtout 7.2, 7.3 et 7.4. Le point important est qu'on a une notion de « localisation » d'∞-catégories, que ces localisations sont encore des ∞-catégories, et que si on voit une catégorie de modèle comme une ∞-catégorie via son nerf, la notion de colimite dans l'∞-catégorie localisé est exactement la notion de colimite homotopique. Le gros du chapitre est donc une collection de techniques pour dire des trucs sur une ∞-catégorie quand on sait la « présenter » par une catégorie de modèle. C'est très utile en pratique mais pour la théorie abstraite ça peut se sauter. Ca peut quand même être une bonne idée d'expliquer comment par exemple ça permet de faire des catégories dérivées (qui ont une structure de modèle) en des ∞-catégories, et ça fait le lien avec les catégories dérivées comme ∞-catégories stables. Les gros théorèmes sont essentiellement ceux de 7.8 et 7.9, malheureusement leur preuve utilise peu ou prou tout le barda précédent... Ca peut valoir le coup de mentionner les résultats de 7.11 car Lurie se sert partout partout des ∞-catégories présentables (car elle vérifient un théorème du foncteur adjoint).

Donc dépendamment du temps que vous avez, vous pouvez le commencer au chapitre 1 et tracer jusqu'à la fin du bouquin, mais à mon avis il y en a pour un bon semestre rien qu'avec ça. Sinon, pas mal de truc des chapitres 3 à 5 peuvent se blackboxer : vous pouvez admettre qu'il y a un truc appelés ∞-catégories, que c'est des ensembles simpliciaux qui vérifient des trucs, qu'on a une notion de foncteur, de foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectifs, et que les équivalences d'∞-catégories sont exactement, vous pouvez admettre qu'il y a une ∞-catégorie des ∞-groupoïdes et qu'il y a un théorème de redressement, un foncteur Hom à valeur dans les ∞-groupoïdes et que Yoneda est vérifié, et essayer de partir dès le chapitre 6. Si vous faites ça, à mon avis ça vaut le coup de passer une ou deux séance à expliquer pourquoi tout ces trucs ne sont pas triviaux du tout.

Dans le chapitre 1 de HA, la partie intéressante est la 2.1 qui prouve le gros des trucs sur les ∞-catégories stables. En grande partie, des trucs peuvent être simplifiés ou sautés. Par exemple, la correspondance de Dold-Kan et les suites spectrales qui viennent d'objets filtrés, vous pouvez sauter. Pas mal de trucs techniques sur les t-structures peuvent être sautés.

Bon voilà c'est un giga pavé, mais j'espère que ça te sera utile. Si jamais il y a besoin de faire un exposé à un moment sur des trucs du bouquin de Cisinski je veux bien ! Je suis à Lyon tous les vendredi !

Amicalement, –

Robin Carlier

Projet Long de Recherche

ENS de Lyon Site Monod Téléphone : +33607880187

> Le 3 déc. 2021 à 12 :26, Tubach Swann <swann.tubach@ens-lyon.fr> a écrit : > > Salut Robin, > > Avec quelques amis on aimerait lancer un séminaire sur les caégories supérieures, donc le but final serait d'arriver à la définition et aux premieres propriétés de ce qu'est une infinie catégorie stable. On pense suivre le livre de Cisinski avant d'attaquer le premier chapitre de Higher Algebra mais il est déja assez long et on sait pas exactement quelles parties nous seraient utiles ou non. Je t'écris pour te demander si tu aurais une idée d'un chemin à suivre, pas nécéssairement le plus court, pour arriver aux stable infty cateogories. Merci ! > > Amicalement, > > Swann