Cotangent Partie I

§1. Catégories de modèles (Quillen A, Homotopical Algebra, §4, p.117)

Soit $\mathcal{A}$ une cat. stable par limites finies.

Un morphisme $f : X \to Y \in \mathcal{A}$ est dit épi effectif si $\forall T \in \mathcal{A}$, le diagramme suivant est exact

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,T) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,T) \overset{pr_1^*}{\underset{pr_2^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X \times_Y X, T)$$

dans $\underline{\mathrm{Sets}}$ (un equalizer diagram).

Exemple

$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Tad}}$, $\underline{\mathrm{Ann}}$, f épi effectif $\Leftrightarrow$ f surj.

$$\begin{tikzcd} A \otimes_B A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & \mathrm{Im} f \arrow[ur, "f \text{ surjectif}"'] & \end{tikzcd}$$

Définition.

- un objet $P \in \mathcal{A}$ est projectif si $\forall f : X \to Y$ épi-effectif, $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y)$ est surjectif.

- $\mathcal{A}$ a suffisamment de projectifs si $\forall X \in \mathcal{A}$, il est un projectif $P \in \mathcal{A}$ et un épi effectif $f : P \to X$

Théorème (Thm 1).

Soit $\mathcal{A}$ une cat. stable par limite finies avec suffisamment de projectifs, si on note $s\mathcal{A}$ la cat. des obj. simpliciaux sur $\mathcal{A}$, alors il existe une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{A}$ en posant :

i) les fibrations sont les f t.q. $\underline{Hom}(P, f)$ est une fibration $\forall P$ projectif $\in \mathcal{A}$.

ii) les équivalences faibles sont les f t.q. $\underline{Hom}(P, f)$ est une équiv. faible $\forall P$ proj.

iii) les cofib. sont les f t.q. f a la propriété de RG rel. à la classe des fib. triviales

si $\mathcal{A}$ satisfait l'une des deux conditions suivantes :

(*) Tout objet de $s\mathcal{A}$ est fibrant ;

(**) $\mathcal{A}$ est stable par limites inductives et possède un ensemble de petits générateurs proj.

Exemple.

$R[X]$, $X \in \underline{Sets}$

$\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Mod}}_C$, Aff_R, $\mathrm{Aff}_{R/C}$ alors $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses du théorème.

Idée de preuve.

(*) Si $f : A \to B \in \mathcal{A}$ et A, B sont fibrants, alors

$$A \xrightarrow{i} A \times_B B^I \xrightarrow{p} B$$

rétract par déf. forte — fibration.

$\leadsto$ i est une équivalence d'homotopies des $\underline{s\mathcal{A}}$ qui s'envoie sur équiv. d'homotopies des $\underline{Sets}$ via $\underline{\mathrm{Hom}}(P,-)$

$\leadsto$ i est une équiv. faible des $\underline{s\mathcal{A}}$.

Si f a la LLP rel. aux fibrations, alors c'est une cofib. et un rétract de i, i.e. une cofib. triviale.

Réciproquement si f est cofib. triviale, alors p est une cofib. triviale $\rightsquigarrow$ f est un rétract de i
$\rightsquigarrow$ f est " " par déf forte.

Donc f a la LLP rel. aux fibrations.

Ensuite, il suffit de factoriser $f = qj$, j cofibrat° q fib. triviale $\rightsquigarrow$ $f(pq)j$, j cofib triviale, pq fib.

(**) Soit $\underline{U}$ un ens. de petits générateurs proj. Alors $f \in s\mathcal{A}$ est une fib. ou une équiv. faible ssi $\underline{\mathrm{Hom}}(P,f)$ en est une dans $\underline{\mathrm{Sets}}$ $\forall P \in \underline{U}$
$\rightsquigarrow$ les fib. sont caractérisées par la RLP rel. aux flèches de la forme $P \otimes \Lambda^n_k \to P \otimes \Delta^n$ $\forall P \in \underline{U}$, $0 \leq k < n$. Mais P petit dans $\mathcal{A} \Rightarrow P \otimes \Lambda^n_k$ petit dans $s\mathcal{A}$ donc le small object argument s'applique: toute f se factorise comme $f = \underline{p}i$ avec p fib.

et i ayant la LLP rel. aux fibrations.

$\rightsquigarrow$ suffit de montrer que i est une équiv. faible.

Ex^∞ $\rightsquigarrow$ foncteur de Kan.

$$(Ex\, K)_n := \mathrm{Hom}_{\underline{sSets}}(S\downarrow\Delta^n, K) \qquad \underline{S}$$

limite projective (de $\underline{Sets}$) d'un diagramme fini incluant K_n, K_{n-1} et les opérateurs de faces de K.

Puisque $\mathcal{A}$ est stable par limite finie, on obtient un foncteur $Ex : s\underline{Sets} \to s\underline{\mathcal{A}}$ en posant

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A, Ex\,X) = Ex\,\underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \quad \begin{array}{l}\forall A \in ob(\mathcal{A}) \\ \forall X \in ob(s\underline{\mathcal{A}})\end{array}$$

La flèche naturelle $K \to Ex\,K$ s'étend en $X \to Ex\,X$

$\rightsquigarrow$ on peut définir $Ex^\infty(X) := \varinjlim Ex^n(X)$ et on a une flèche $\varepsilon_X : X \to Ex^\infty(X)$.

Si $P \in \underline{\mathcal{U}}$, puisque P est petit, $\underline{\mathrm{Hom}}(P, Ex^\infty X) = Ex^\infty \underline{\mathrm{Hom}}(P, X)$

donc $Ex^\infty X$ est fibrant et ε_X est une équiv. faible.

⇝ Si $i : A \to B$ a la LLP rel. aux fibrat°, on peut relever le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "i"'] & Ex^\infty A \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "u"] & e \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "s\varepsilon_B i"] \arrow[d, "i"'] & (Ex^\infty B)^{\Delta^1} \arrow[d, "(j_0, j_1)"] \\ B \arrow[r, "(\varepsilon_B, (Ex^\infty i)u)"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & (Ex^\infty B) \times (Ex^\infty B) \end{tikzcd}$$

où $ui = \varepsilon_A$, $(Ex^\infty i)u \sim \varepsilon_B$, $\varepsilon_B i = (Ex^\infty i)u$

Si $P \in \underline{U}$, on applique le foncteur $N\,\underline{Hom}(P,-)$ où $N : s\underline{Sets} \to Ho\, s\underline{Sets}$ est le foncteur de localisat°.

⇝ $N\underline{Hom}(P,i)$ est un iso (Prop. 1 de Quillen)

$\underline{Hom}(P,i)$ est une équiv. faible

⇝ une f avec la LLP rel. aux fib. est une cofib. triviale.

Réciproquement, si f est une cofib. triviale $f = pi$ où p est une fib. et i a la LLP rel. aux fib.

⇝ i est une équiv. faible donc p est triviale

$\rightsquigarrow$ f est un retract de i, donc a la LLP rel. aux fibrations. $\blacksquare$